Série B
N° d'ordre :
16

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JEAN MÉVEL

1re THÈSE. — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA DIFFRACTION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PAR LES SPHÈRES.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 juillet 1957 devant la Commission d'examen.

MM. M. SCHMITT..... *Président.*
P. GRIVET .....
R. FREYMANN ..... *Examinateurs.*
L. VIGNERON .....

PARIS
MASSON ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1960

1957

Série B
N° d'ordre :
16

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JEAN MÉVEL

1re **THÈSE.** — CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA DIFFRACTION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PAR LES SPHÈRES.

2e **THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 6 juillet 1957 devant la Commission d'examen.

MM. M. SCHMITT..... *Président.*
P. GRIVET .....
R. FREYMANN ..... } *Examinateurs.*
L. VIGNERON .....

PARIS
MASSON ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DE L'ACADÉMIE DE MÉDECINE
120, BOULEVARD SAINT-GERMAIN

1960

97/62

FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES

Doyen : M. SCHMITT

Assesseur : M. POISSON

Doyens Honoraires : MM. BOUZAT, MILON, TRÉHIN

Professeurs Honoraires : MM. BOUZAT, CONDUCHE, TRÉHIN, ROHMER

Professeurs	*Maîtres de Conférences*	
M. ANTOINE Mlle CHARPENTIER MM. VASILESCO MARTIN PAUC	Mlle LIBERMANN MM. BRILLOUET RAFFIN	Mathématiques
MM. FREYMANN SCHMITT RAVILLY	Mme COUTURE MM. VIGNERON LE BOT (Jean) BOULLOUD	Physique
MM. SALMON-LEGAGNEUR VENE LE MOAL DUNOYER	MM. LEVAS HAGENMULLER GRILLOT	Chimie
M. POISSON	MM. GODET RICHARD VAUGIEN	Zoologie
M. MILON	Mlle RENAUD	Géologie
MM. HAGENE DES ABBAYES	MM. VILLERET EYME	Botanique

Secrétaire : M. ROUSSEAU

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Rennes, sous la direction de M. le Professeur Freymann. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma gratitude pour les facilités qu'il m'a accordées. J'adresse mes remerciements à M. le Professeur Schmitt, Doyen de la Faculté des Sciences, pour avoir bien voulu présider mon Jury. Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. le Professeur Grivet pour les précieux conseils qu'il m'a donnés au cours de la préparation de ce travail, ainsi qu'à M. le Professeur Vigneron, pour avoir accepté d'être Membre du jury. Enfin, je remercie le personnel du Laboratoire, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé de leurs encouragements et de leurs conseils.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542723_0002

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA DIFFRACTION DES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES PAR LES SPHÈRES [1]

Par JEAN MÉVEL

INTRODUCTION

Le but de ce travail est l'étude expérimentale de la diffraction des ondes électromagnétiques centimétriques par les sphères. De réalisation récente, les expériences de diffraction en ondes centimétriques ont pris ces dernières années une extension considérable. La théorie générale de la diffraction restée stationnaire depuis longtemps en a subi des remaniements profonds.

Jusqu'à l'époque où fut commencé ce travail, les phénomènes de diffraction par les sphères n'avaient été étudiés que sous l'aspect tout particulier de la section efficace radar. Les résultats obtenus avaient montré un bon accord avec la théorie rigoureuse de Mie dans le cas de sphères réfléchissantes. Mais, les phénomènes de diffraction proprement dits restaient inexplorés, bien que leur importance ne fît aucun doute.

C'est pourquoi, il nous a paru intéressant d'entreprendre cette étude, en insistant sur son aspect optique trop négligé au profit de son caractère radioélectrique et technique. Nous n'avons pas tenté d'effectuer une étude systématique de tous les cas possibles ou simplement intéressants, mais nous avons plutôt porté notre effort sur les expériences qui permettent d'approfondir les connaissances des phénomènes généraux.

Notre premier travail a été de réaliser un ensemble de matériel mécanique et radioélectrique permettant d'effectuer les déterminations avec une bonne précision. Pour alléger l'exposé qui suit, nous avons

[1] Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Rennes pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences physiques et soutenue le 6 juillet 1957 devant la Commission d'examen.

décrit ailleurs ces appareillages, nous contentant d'insérer au chapitre premier les données essentielles à la compréhension de nos expériences.

Nous avons repris l'étude théorique de la diffraction par la sphère isolée dans l'espace. On trouve au chapitre II un exposé d'après Stratton des méthodes de résolution du problème. Nous y avons adjoint l'étude de la diffraction par un ensemble de deux sphères et donné un bref aperçu de la théorie de Trinks qui semble peu connue et dont les résultats sont parfois employés à tort.

Les premiers problèmes abordés sont : l'étude de l'intensité et de la phase au voisinage de l'axe, à grande distance des sphères, et celle des intensités dans l'axe et à proximité du corps diffringent. Tout en apportant des connaissances nouvelles, ces expériences permettent de vérifier le bon fonctionnement de l'appareil.

Nous avons considéré la question des sections efficaces radar pour des sphères réfléchissantes et des sphères diélectriques absorbantes ou non. Nous avons précisé le comportement de cette grandeur en fonction du diamètre.

La question de l'influence électromagnétique entre sphères présente un grand intérêt en particulier pour l'optique des suspensions. Nous avons étendu expérimentalement les prévisions de la théorie au cas des sphères de diamètre plus grand que la longueur d'onde.

L'un des problèmes les plus intéressants que permette d'aborder l'étude expérimentale de la diffraction des ondes centimétriques est l'influence, sur le diagramme de diffraction, de la structure des corps diffringents, lorsque les détails de cette dernière sont petits par rapport à la longueur d'onde. Nous avons pu mettre en évidence le rôle essentiel de la polarisation de la lumière incidente et de la symétrie des corps diffringents.

Enfin, nous avons montré ailleurs [26 *bis*] avec quelle simplicité l'étude expérimentale du diagramme polaire permet de résoudre les problèmes de la diffusion par les sphères, que l'optique expérimentale et le calcul numérique sont presque impuissants à traiter.

CHAPITRE PREMIER

Techniques expérimentales.

Nous avons décrit en détail ailleurs [26] l'appareillage que nous avons réalisé pour l'étude de la diffraction des ondes électromagnétiques centimétriques. Deux dispositifs ont été construits, l'un (fig. 1) destiné aux études au voisinage de l'axe, l'autre [26 *bis*] prévu pour la diffraction éloignée. Ils ne diffèrent que par leur réalisation mécanique,

les systèmes de mesure étant identiques. Nous nous bornons à en rappeler les caractéristiques essentielles.

Un champ électromagnétique plan, polarisé linéairement est créé par un klystron S (fig. 1) associé à un cornet émetteur C. La longueur d'onde est 1,25 cm, la puissance rayonnée 40 mW. A 40 cm environ en avant du cornet C, on dispose les corps diffringents. Dans cette région, le champ est à peu près constant et plan dans un volume nettement supérieur à celui des corps diffringents.

La sonde réceptrice Sr (petit cornet ou sonde coaxiale selon les cas) capte l'énergie présente en chaque point du champ. Un système de

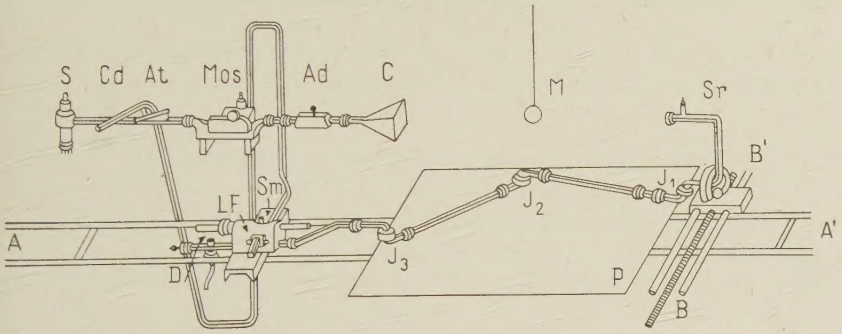

Fig. 1. — Appareillage d'étude de la diffraction au voisinage de l'axe.

guides et de joints tournants permet de la transmettre au détecteur dont la tension de sortie indique, après étalonnage, l'intensité du champ. De plus, un couplage direct entre le klystron et le détecteur permet une détermination interférentielle des phases.

Les dispositifs électroniques associés à l'appareil comprennent une alimentation très stable pour le klystron, un modulateur en signaux carrés et un ensemble d'amplification et de mesure des tensions détectées. Ils permettent un enregistrement direct des intensités en fonction du déplacement de la sonde et une mesure indirecte des phases. Les étalonnages effectués ont montré que l'on peut déterminer l'intensité à quelques pour-cent près et les phases, avec une précision de $\lambda/10$.

Nous avons étudié soigneusement l'influence perturbatrice, sur le champ, des sondes de mesure et des dispositifs de suspension des corps diffringents. La première cause d'erreur ne peut être étudiée qu'indirectement, par comparaison des résultats des mesures et de ceux de la théorie dans des cas typiques. Nous montrerons (chap. III) qu'elle est en général négligeable. La seconde a pu être éliminée en suspendant les échantillons à étudier, par des fils diélectriques fins, à des supports situés hors du champ.

CHAPITRE II

Théorie mathématique de la diffraction d'une onde plane par les sphères.

Nous rappelons succinctement la théorie de Mie et Debye qui résout le problème de la diffraction d'une onde électromagnétique plane, polarisée rectilignement, par une sphère de nature quelconque, homogène et isotrope. Nous résumons également le travail de Trinks qui étend la solution de Mie et Debye au cas de plusieurs sphères voisines. Puis nous examinons les propriétés des solutions ainsi obtenues.

Diffraction par une sphère isolée dans l'espace.

I) **Enoncé du problème et historique.** — Soit une onde monochromatique plane, polarisée rectilignement, se propageant dans la direction Oz. On place en un point de l'axe Oz une sphère formée d'un corps homogène et isotrope, de perméabilité magnétique μ, de constante diélectrique ε, de conductivité σ. Le milieu extérieur à la sphère étant supposé sans pertes, déterminer le nouveau système d'ondes électromagnétiques créé par la sphère ?

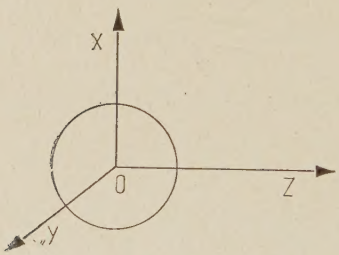

Fig. *a*.

Ce champ doit satisfaire aux équations de Maxwell en tout point intérieur ou extérieur à la sphère, vérifier les équations de continuité sur la surface de la sphère, n'être infini en aucun point. A l'infini, le champ diffracté doit se réduire à une onde sphérique divergente.

Le problème a été résolu pour la première fois par Mie [28]. Debye [9] a simplifié les calculs par l'introduction de potentiels scalaires. Stratton [34] a amélioré la solution de Debye ; c'est son exposé que nous résumons ci-dessous.

II) **Théorie de Mie (exposé de Stratton).** — Le problème se résout en trois temps :

a) On cherche une solution de l'équation scalaire de propagation.
b) On en déduit une solution de l'équation vectorielle.

c) On détermine les différents paramètres intervenant dans les solutions de manière à satisfaire aux équations de continuité et aux conditions à l'infini.

a) **Intégration de l'équation scalaire.** — L'équation scalaire de propagation :

$$\vec{\nabla}^2\pi + k^2\pi = 0 \tag{1}$$

s'écrit en coordonnées polaires :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 r\pi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\pi}{\partial\varphi^2} + k^2\pi = 0. \tag{2}$$

On peut en obtenir une solution :

$$\pi = \mathrm{R}(r).\mathrm{T}(\theta).\mathrm{F}(\varphi) \tag{3}$$

produit de 3 fonctions R, T, F, ne dépendant que d'une coordonnée. En substituant l'expression (3) dans (2), l'équation aux dérivées partielles se sépare en trois équations différentielles du second ordre :

$$r^2\frac{d^2\mathrm{R}}{dr^2} + 2r\frac{d\mathrm{R}}{dr} + (k^2r^2 - \alpha)\mathrm{R} = 0 \tag{4-I}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\mathrm{T}}{d\theta}\right) + (\alpha - \beta/\sin^2\theta)\mathrm{T} = 0 \tag{4-II}$$

$$\frac{d^2\mathrm{F}}{d\varphi^2} + \beta\mathrm{F} = 0 \tag{4-III}$$

(4-III) admet pour solutions les fonctions trigonométriques. Celles-ci doivent être périodiques, de période multiple entier de 2π, donc β est le carré d'un entier ($\beta = m^2$).

Dans (4-II), on pose $\eta = \cos\theta$, l'équation devient :

$$(1-\eta^2)\frac{d^2\mathrm{T}}{d\eta^2} - 2\eta\frac{d\mathrm{T}}{d\eta} + \left(\alpha - \frac{m^2}{1-\eta^2}\right)\mathrm{T} = 0. \tag{5}$$

Pour qu'elle ait des solutions admissibles, il faut que [34] $\alpha = n(n+1)$ (n entier).

C'est alors une équation de Legendre dont les solutions sont :

pour $m = 0$, les polynômes de Legendre $\mathrm{P}_n(\eta)$;
pour $m \neq 0$, les polynômes associés de Legendre $\mathrm{P}_n^m(\eta)$.

Dans (4-I), posons $\mathrm{R} = \frac{\mathrm{V}(r)}{\sqrt{kr}}$, l'équation devient :

$$r^2\frac{d^2v}{dr^2} + r\frac{dv}{dr} + \left[k^2r^2 - \left(n+\tfrac{1}{2}\right)^2\right]r = 0. \tag{6}$$

C'est une équation de Bessel [37] pour les fonctions d'ordre $\left(n+\frac{1}{2}\right)$. On en déduit :

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr). \tag{7}$$

La condition physique que π reste fini en tout point fixe le choix de $Z_{n+\frac{1}{2}}(kr)$. On prendra :

1° si le domaine considéré inclut l'origine :

$$Z_{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr), \text{ Fonctions de Bessel du premier genre ;}$$

2° si le domaine inclut le point à l'infini :

$$Z_{n+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr), \text{ Fonction de Hankel du second genre.}$$

On pose pour simplifier :

$$z_n(kr) = \frac{1}{\sqrt{kr}} Z_{n+\frac{1}{2}}(kr) ;$$

$$j_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) ; \qquad h^{(2)}_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} H^{(2)}_{n+\frac{1}{2}}(kr).$$

Les j_n et h_n sont les fonctions sphériques de Bessel.

Les solutions de l'équation scalaire s'écrivent donc :

$$\left.\begin{aligned} \pi_{\substack{e\\o}mn} &= \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi P^m_n(\cos\theta)\, j_n(kr), \text{ domaine contenant l'origine} \\ \pi_{\substack{e\\o}mn} &= \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi P^m_n(\cos\theta)\, h^{(2)}_n(kr), \text{ domaine contenant le point à l'}\infty \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Les indices e et o désignent respectivement des solutions paires et impaires en φ.

b) **Intégration de l'équation vectorielle.** — Soit π une solution de l'équation scalaire, $\vec{a}$ un vecteur constant de longueur l. Les trois vecteurs :

$$\vec{L} = \vec{\nabla}.\pi, \qquad \vec{M} = \vec{\nabla} \wedge \vec{a}\pi, \qquad \vec{N} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \wedge \vec{M} \tag{9}$$

vérifient identiquement l'équation vectorielle $\vec{\nabla}^2\vec{C} + k^2\vec{C} = 0$.

En coordonnées sphériques, et seulement dans ce cas, les trois vecteurs :

$$\vec{L} = \vec{\nabla}.\pi, \qquad \vec{M} = \vec{\nabla} \wedge \vec{R}\pi = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \wedge \vec{N}, \qquad \vec{N} = \frac{1}{k}\vec{\nabla} \wedge \vec{M} \tag{9-I}$$

vérifient identiquement l'équation vectorielle, π étant solution de l'équation scalaire, $\vec{R} = \vec{\imath}_r.r$.

$\vec{i}_r$ vecteur unitaire orientant OM, O origine, M point courant, $r = \mathrm{OM}$.

En omettant le terme en $e^{j\omega t}$ et puisqu'il n'y a pas de charges libres, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + j\omega\mu\vec{H} = 0, \quad \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla}.\vec{E} = \vec{\nabla}.\vec{H} = 0. \tag{10}$$

Il est donc possible de représenter $\vec{E}$ et $\vec{H}$ par une combinaison linéaire de $\vec{M}$ et $\vec{N}$, puisque chacun de ces vecteurs est proportionnel au rotationnel de l'autre. Nous écrirons :

$$\vec{E} = -\Sigma_n(a_n\vec{M}_n + b_n\vec{N}_n), \qquad \vec{H} = \frac{k}{j\omega\mu}\Sigma_n(a_n\vec{N}_n + b_n\vec{M}_n) \tag{11}$$

en posant $\vec{M} = \vec{m}e^{j\omega t}$, $\vec{N} = \vec{n}e^{j\omega t}$, il vient :

$$\left.\begin{aligned}
\vec{m}_{e_{0mn}} &= \mp \vec{i}_\theta \frac{m}{\sin\theta} z_n(kr)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi - \vec{i}_\varphi z_n(kr)\frac{d\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \\
\vec{n}_{e_{0mn}} &= \vec{i}_r \frac{n(n+1)}{kr} z_n(kr)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} m\varphi \\
&\quad - \vec{i}_\theta \frac{1}{kr}\frac{d}{dr}[rz_n(kr)]\frac{d\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)}{d\theta}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \\
&\quad \mp \vec{i}_\varphi \frac{m}{kr\sin\theta}\frac{d}{dr}[rz_n(kr)]\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

c) **Détermination des paramètres et résolution du problème de diffraction.** — Il faut représenter l'onde plane incidente en fonction des vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{n}$. Utilisant les propriétés d'orthogonalité des fonctions $\vec{m}$ et $\vec{n}$, ainsi que leur parité, Stratton [34] a établi l'expression :

$$\left.\begin{aligned}
\vec{E}^i &= \vec{i}_x E_0 e^{j(\omega t - kz)} = E_0 e^{j\omega t}\sum_{n=1}^{\infty}(-j)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}(\vec{m}_{o1n} + j\vec{n}_{e1n}) \\
\vec{H}^i &= \vec{i}_y \frac{E_0}{r_{i0}} e^{j(\omega t - kz)} = -\frac{E_0}{r_{i0}} e^{j\omega t}\sum_{n=1}^{\infty}(-j)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}(\vec{m}_{e1n} - j\vec{n}_{o1n})
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

avec :

$$\left.\begin{aligned}
\vec{m}_{o_{e1n}} &= \pm \vec{i}_\theta \frac{1}{\sin\theta} j_n(kr)\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\varphi - \vec{i}_\varphi j_n(kr)\frac{d\mathrm{P}_n^1}{d\theta}(\cos\theta)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\varphi \\
\vec{n}_{e_{e1n}} &= \vec{i}_r \frac{n(n+1)}{kr} j_n(kr)\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\varphi \\
&\quad + \vec{i}_\theta \frac{1}{kr}[krj_n(kr)]'\frac{d\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)}{d\theta}\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\varphi \pm \vec{i}_\varphi \frac{[krj_n(kr)]'}{kr}\mathrm{P}_n^1(\cos\theta)\frac{1}{\sin\theta}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\varphi
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

l'accent (') indique une dérivation par rapport à kr.

Nous allons poser pour les champs transmis dans la sphère ($\vec{E}^t$, $\vec{H}^t$) et diffractés ($\vec{E}^s$, $\vec{H}^s$) les mêmes expressions, mais avec des coefficients indéterminés :

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}^s &= E_0 e^{j\omega t}\sum_{n=1}^{\infty}(-j)^n\frac{2n+1}{n+1}\left[a_n^s.\vec{m}_{01n}^{(2)}+j.b_n^s.\vec{n}_{e1n}^{(2)}\right]\\ \vec{H}^s &= -\frac{E_0}{r_{10}}e^{j\omega t}\sum_{n=1}^{\infty}(-j)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\left[b_n^s.\vec{m}_{e1n}^{(2)}-j.a_n^s.\vec{n}_{01n}^{(2)}\right]\end{aligned}\right\}\quad(15)$$

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}^t &= E_0 e^{j\omega t}\sum_{n=1}^{\infty}(-j)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\left[a_n^t.\vec{m}_{01n}+j.b_n^t.\vec{n}_{e1n}\right]\\ \vec{H}^t &= -k_1 E_0 e^{j\omega t}\sum_{n=1}^{\infty}(-j)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\left[b_n^t.\vec{m}_{e1n}-j.a_n^t.\vec{n}_{01n}\right]\end{aligned}\right\}\quad(16)$$

$\vec{m}_{\substack{0\\e}1n}$ et $\vec{n}_{\substack{0\\e}1n}$ sont donnés par les formules (14).

$\vec{m}_{\substack{0\\e}1n}^{(2)}$ et $\vec{n}_{\substack{0\\e}1n}^{(2)}$ sont donnés par les mêmes formules, dans lesquelles on a remplacé j_n par $h_n^{(2)}$; k_1 est la constante de propagation de la matière constituant la sphère ($k_1^2=\omega^2\mu_1\varepsilon_1-j\omega\mu_1\sigma_1$) ; r_{10} la constante de propagation du diélectrique entourant la sphère.

Pour déterminer les paramètres a_n et b_n, on tient compte des conditions de continuité sur la surface de la sphère :

$$\vec{i}_r\wedge(\vec{E}^i+\vec{E}^s)=\vec{i}_r\wedge\vec{E}^t;\qquad \vec{i}_r\wedge(\vec{H}^i+\vec{H}^s)=\vec{i}_r\wedge\vec{H}^t\quad(17)$$

ce qui fournit pour les déterminer 4 relations. En posant :

$$n_c=\sqrt{\varepsilon_c}=k_1/k=\sqrt{\varepsilon_1-i\sigma_1/\omega\varepsilon_0},\qquad \rho=ka=2\pi a/\lambda\quad(18)$$

il vient :

$$\left.\begin{aligned}a_n^s &= \frac{j_n(\rho)[n_c\rho j_n(n_c\rho)]'-j_n(n_c\rho)[\rho j_n(\rho)]'}{h_n^{(2)}(\rho)[n_c\rho j_n(n_c\rho)]'-j_n(n_c\rho)[\rho h_n^{(2)}(\rho)]'}\\ b_n^s &= \frac{n_c^2 j_n(n_c\rho)[\rho j_n(\rho)]'-j_n(\rho)[n_c\rho j_n(n_c\rho)]'}{n_c^2 j_n(n_c\rho)[\rho h_n^{(2)}(\rho)]'-h_n^{(2)}(\rho)[n_c\rho j_n(n_c\rho)]'}\end{aligned}\right\}\quad(19)$$

on déterminerait de même a_n^t et b_n^t.

On peut donner une expression plus simple de ces coefficients, en introduisant les fonctions de Riccati-Bessel :

$$S_n(z)=\sqrt{\frac{\pi z}{2}}J_{n+\frac{1}{2}}(z)=zj_n(z),\qquad E_n(z)=\sqrt{\frac{\pi z}{2}}H_{n+\frac{1}{2}}^{(2)}(z)=zh_n^{(2)}(z)\quad(20)$$

il vient :

$$a_n^s = -\frac{\dfrac{S_n(\rho)}{S'_n(\rho)} - \dfrac{1}{n_c}\dfrac{S_n(n_c\rho)}{S'_n(n_c\rho)}}{\dfrac{E_n(\rho)}{E'_n(\rho)} - \dfrac{1}{n_c}\dfrac{S_n(n_c\rho)}{S'_n(n_c\rho)}}, \qquad b_n^s = -\frac{\dfrac{S_n(\rho)}{S'_n(\rho)} - n_c\dfrac{S_n(n_c\rho)}{S'_n(n_c\rho)}}{\dfrac{E_n(\rho)}{E'_n(\rho)} - n_c\dfrac{S_n(n_c\rho)}{S'_n(n_c\rho)}}. \quad (21)$$

Dans ces expressions, pour n_c complexe, seul le terme $Q = S_n(n_c\rho)/S'_n(n_c\rho)$ inclut des termes complexes (ρ est réel, milieu extérieur sans perte).

Dans le cas particulier des sphères parfaitement réfléchissantes, la condition aux limites devient :

$$\vec{i}_r \wedge (\vec{E}^i + \vec{E}^s) = 0,$$

ce qui entraîne :

$$a_n^s = -j_n(\rho)/h_n^{(2)}(\rho), \qquad b_n^s = -[S_n(z)]'/[E_n(z)]' \qquad \text{pour } z = \rho. \quad (22)$$

Application de ces résultats. — 1) Section efficace d'absorption. — Une sphère, placée dans un champ d'ondes planes, intercepte, diffracte et absorbe une certaine énergie. La section efficace d'absorption est la section droite du tube de force qui transporte la même énergie.

On l'obtient en calculant le flux du vecteur de Poynting sur une sphère de rayon R très grand, concentrique à la sphère diffringente. La composante radiale du vecteur de Poynting est :

$$S_R = \tfrac{1}{2} R_e(E_\theta H^*_\varphi - E_\varphi H^*_\theta) \quad (23)$$

comme :

$$\vec{E} = \vec{E}^i + \vec{E}^s, \qquad \vec{H} = \vec{H}^i + \vec{H}^s,$$

il vient :

$$\left.\begin{aligned} S_R = \tfrac{1}{2} R_e[&(E^i_\theta H^{*i}_\varphi - E^i_\varphi H^{*i}_\theta) + (E^s_\theta H^{*s}_\varphi - E^s_\varphi H^{*s}_\theta) \\ &+ (E^i_\theta H^{*s}_\varphi - E^i_\varphi H^{*s}_\theta + E^s_\theta H^{*i}_\varphi - E^s_\varphi H^{*i}_\theta)] \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Le flux de S_R représente l'énergie $-W_a$ absorbée par la sphère. Le flux du premier terme est nul (flux de l'onde incidente). Le flux du second terme représente l'énergie W_s diffractée par la sphère. Le flux du troisième représente l'énergie totale absorbée ou diffractée par la sphère :

$$\left.\begin{aligned} W_t &= W_a + W_s \\ &= -\tfrac{1}{2} R_e \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (E^i_\theta H^{*s}_\varphi - E^i_\varphi H^{*s}_\theta + E^s_\theta H_\varphi - E^s_\varphi H^{*i}_\theta) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

L'intégration de cette expression peut être effectuée pour R grand,

en utilisant les expressions asymptotiques des fonctions de Bessel et des relations d'orthogonalité des fonctions de Legendre. Elle donne :

$$W_t = -\frac{\pi E_0^2}{r_0 k^2} R_e \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n^s + b_n^s) \tag{26}$$

d'où la section efficace :

$$\sigma_t = -\frac{2\pi}{k^2} R_e \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(a_n^s + b_n^s). \tag{27}$$

2) **Énergie diffractée dans la direction** (θ, φ). — C'est :

$$S_r^s(\theta, \varphi) = \frac{1}{2} R_e(E_\theta^s H_\varphi^{*s} - E_\varphi^s H_\theta^{*s}). \tag{28}$$

$$\begin{aligned} S_R^s(\theta, \varphi) = {} & \frac{E_0^2}{2r_0(kR)^2} R_e \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{2m+1}{m(m+1)} \Big[\frac{P_n^1 P_m^1}{\sin^2\theta} (a_n^s a_m^{*s} \cos^2\varphi + b_n^s b_m^{*s} \sin^2\varphi) \\ & + \frac{dP_n^1}{d\theta} \frac{dP_m^1}{d\theta} (a_n^s a_m^{*s} \sin^2\varphi + b_n^s b_m^{*s} \cos^2\varphi) \\ & + \frac{P_m^1}{\sin\theta} \frac{dP_n^1}{d\theta} (a_m^{*s} b_n^s \cos^2\varphi + a_n^s b_m^{*s} \sin^2\varphi) \\ & + \frac{P_n^1}{\sin\theta} \frac{dP_m^1}{d\theta} (a_n^s b_m^{*s} \cos^2\varphi + a_m^{*s} b_n^s \sin^2\varphi) \Big] \end{aligned} \tag{29}$$

L'énergie renvoyée en sens inverse de la direction de propagation se simplifie en :

$$S_R(\pi) = \frac{E_0^2}{2r_0(kR)^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(n + \frac{1}{2}\right)(a_n^s - b_n^s) \right|^2. \tag{30}$$

Remarque. — Du point de vue formel, la solution obtenue est rigoureuse et le problème de la diffraction des ondes électromagnétiques par la sphère est parfaitement résolu.

Il en est tout autrement du point de vue pratique. Les solutions sont inutilisables dès que ρ est grand ($\rho > 10$ environ) du fait de la mauvaise convergence des séries. De nombreux calculs ont été effectués dans le cas de sphères conductrices ou purement diélectriques pour des valeurs de ρ variant de 0 à 10 (voir bibl. 18). Ce n'est que récemment que des calculs ont été entrepris pour de grandes valeurs de ρ [12]. Le cas des sphères absorbantes n'a été que peu étudié.

Ceci montre tout l'intérêt, d'une part, des méthodes d'approximation qui tentent de résoudre des cas particuliers du problème avec une précision limitée, d'autre part, des études expérimentales qui fournissent directement le résultat cherché.

Diffraction par plusieurs sphères voisines.

I) **Cas de deux sphères.** — Si dans le champ d'ondes planes considéré au § Ier de ce chapitre, on introduit au voisinage de la sphère S_1, une seconde sphère diffringente S_2, le champ diffracté par S_2 modifie le champ sur S_1 et les formules Mie ne sont plus valables. Trinks [36] a résolu dans ce cas le problème de diffraction. Le champ résultant obtenu (champ incident + champs diffractés par les sphères) doit satisfaire aux mêmes conditions que précédemment.

Pour résoudre le problème, Trinks part de la solution de Debye relative au cas où S_2 est seule dans le champ. Soit A_2 le champ résultant obtenu (champ incident + champ diffracté par S_2), on considère ce champ A_2 comme incident sur S_1 et l'on se trouve ramené à un problème analogue à celui du § Ier.

L'introduction des conditions aux limites sur la surface de S_2 nécessite que l'on transforme les potentiels de A_2 — qui sont donnés en coordonnées polaires de centre S_2 — dans un nouveau système de coordonnées polaires de centre S_1. Là se trouve la principale difficulté du calcul.

a) **La solution de Debye.** — Elle fait dériver le champ diffracté par une sphère S, de deux potentiels π_E et π_H formés par des combinaisons linéaires des termes suivants :

$$j_n(kr)\mathrm{P}_n\ (\cos\theta)\ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ m\varphi\,; \qquad h_n^{(2)}(kr)\mathrm{P}_n^m\ (\cos\theta)\ \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\ m\varphi$$

(mêmes notations qu'au § Ier).

Debye a montré [9] que les potentiels du champ incident ont pour valeur :

$$\left.\begin{aligned}\pi_E &= \frac{1}{k}\sum_{nm} j_n(kr)\mathrm{P}_n^m\ (\cos\theta)\ (e_{nm}\cos m\varphi + \bar{e}_{nm}\sin m\varphi)\\ \pi_H &= \frac{1}{k}\sum_{nm} j_n(kr)\mathrm{P}_n^m\ (\cos\theta)\ (h_{nm}\cos m\varphi + \bar{h}_{nm}\sin m\varphi)\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

et ceux du champ diffracté :

$$\left.\begin{aligned}\pi_E &= \frac{1}{k}\sum_{nm} h_n^{(2)}(kr)\mathrm{P}_n^m\ (\cos\theta)\ (\mathrm{E}_{nm}\cos m\varphi + \bar{\mathrm{E}}_{nm}\sin m\varphi)\\ \pi_H &= \frac{1}{k}\sum_{nm} h_n^{(2)}(kr)\mathrm{P}_n^m\ (\cos\theta)\ (\mathrm{H}_{nm}\cos m\varphi + \bar{\mathrm{H}}_{nm}\sin m\varphi)\end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

avec :

$$\mathrm{E}_{nm} = \mathrm{C}_n e_{nm}\,; \quad \bar{\mathrm{E}}_{nm} = \mathrm{C}_n \bar{e}_{nm}\,; \quad \mathrm{H}_{nm} = \mathrm{D}_n h_{nm}\,; \quad \bar{\mathrm{H}}_{nm} = \mathrm{D}_n \bar{h}_{nm}\,;$$
$$\mathrm{C}_n = b_n^s\,; \quad \mathrm{D}_n = -a_n^s.$$

b) **La transformation des coordonnées.** — Sans diminuer la généralité, on peut choisir des systèmes de coordonnées polaires d'origines O_1 et O_2, centres de S_1 et S_2, ayant en commun l'axe polaire et le plan $\varphi = 0$. Les formules de transformation s'écrivent :

$$r_2 \cos\theta_2 = r_1 \cos\theta_1 - R\,; \qquad r_2 \sin\theta_2 = r_1 \sin\theta_1.$$
$$\varphi_2 = \varphi_1 = \varphi\,; \qquad r_2^2 = r_1^2 + R^2 - 2r_1 \cos\theta_1.$$

Un terme de la forme :
$h_n^{(2)}(kr_2)P_n^m(\cos\theta_2)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi$, solution de l'équation $\overrightarrow{\nabla}^2 V + k^2 V = 0$, se

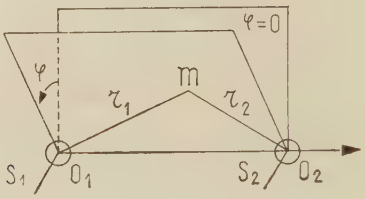

Fig. *b*.

transformera dans les nouvelles coordonnées en une combinaison linéaire de solutions analogues :

$$\left.\begin{aligned} h_n^{(2)}(kr_2)P_n^m(\cos\theta_2)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} m\varphi \\ = \sum_{\nu\mu} j_\nu(kr_1)P_\nu^\mu(\cos\theta_1)(A_{\nu\mu}^{nm}\cos\mu\varphi + \overline{A}_{\nu\mu}^{nm}\sin\mu\varphi) \\ + \sum_{\nu\mu} h_\nu^{(2)}(kr_1)P_\nu^\mu(\cos\theta_1)(B_{\nu\mu}^{nm}\cos\mu\varphi + \overline{B}_{\nu\mu}^{nm}\sin\mu\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Les termes en B sont nuls, car $h_n^{(2)}(kr_2)$ est fini pour $r_1 = 0$ ($r_2 = R \neq 0$). De plus, Trinks a montré que :

$$h_n^{(2)}(kr_2)P_n^m(\cos\theta_2) = \sum_\nu j_\nu(kr_1)P_\nu^m(\cos\theta_1)\,A_\nu^{mn}. \quad (34)$$

En posant $kr_2 = \zeta$, $kr_1 = \varepsilon$, $kR = Z$, $h_n^{(2)} = j_n - in_n$, l'équation (34) se décompose en :

$$\left.\begin{aligned} j_n(\zeta)P_n^m(\cos\theta_2) &= \sum_\nu B_\nu^{mn} j_\nu(\varepsilon)P_\nu^m(\cos\theta_1) \\ n_n(\zeta)P_n^m(\cos\theta_2) &= \sum_\nu C_\nu^{mn} j_\nu(\varepsilon)P_\nu^m(\cos\theta_1) \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

Pour déterminer B_ν^{mn} et C_ν^{mn}, on introduit les développements en série :

$$j_n(x) = \sum_u c_n^u x^{n+2u}, \qquad n_n(x) = \sum_u e_n^u x^{2u-n-1},$$

$$P_n^m(y) = \sum_{v=0}^{(nm)/2} d_{nm}^v y^{n-m-2v}(1-y^2)^{m/2}.$$

En développant $(\zeta^2)^{u+v}$ et $(\zeta \cos\theta_2)^{n-2v-m}$ suivant la formule du binôme, la première équation de (35) se transforme en :

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{u=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{(nm)/2} c_n^u d_{nm}^v \sum_{p=0}^{n-2v-m}\sum_{q=0}^{u+v}\sum_{t=0}^{u+v-q} (-1)^{n-m-2u-p}(-2)^q C_{n-2u-m}^p \\ &\quad C_{u+v}^q C_{u+v-q}^t Z^{n-m+2u-(v+q+2t)} z^{p+q+2t} (\cos\theta_1)^{p+q}(z\sin\theta_1)^m \\ &= \sum_\nu \sum_{\sigma,\tau} B_\nu^{mn} c_\nu^\sigma d_{\nu m}^\tau z^{\nu+2\sigma} (\cos\theta_1)^{\nu-m-2\tau} (\sin\theta_1)^m \end{aligned}\right\} \quad (36)$$

On en déduit les B_ν^{nm} en comparant dans les deux membres les coefficients de $z^k(\cos\theta_1)^k(z\sin\theta_1)^m$.

En opérant de même sur la seconde équation de (35), on obtiendrait une relation de déterminer les C_ν^{mn}.

La notation C_m^p représente le nombre des combinaisons de m objets p à p.

On trouve en particulier pour les premiers coefficients B et C :

$$\left.\begin{aligned} B_k^0 &= (2k+1) j_k(Z) \\ B_k^{10} &= (2k+1)\left[-j_{k+1}(Z) + k\frac{j_k(Z)}{Z}\right] \\ B_{k+1}^{11} &= (2k+3)\frac{j_{k+1}(Z)}{Z} \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Les expressions de C_k^0, C_k^{10}, C_{k+1}^{11} s'obtiennent en remplaçant dans les formules (37), j par n.

c) **Détermination des potentiels dans le cas de la diffraction Rayleigh.** — Dans le cas de la diffraction Rayleigh, les potentiels de l'onde diffractée par la sphère S_2 s'écrivent en coordonnées d'origine O_2 :

$$\left.\begin{aligned} \pi_2^E &= \frac{1}{k} h_1^{(2)}(kr_2)\left[{}_2E_{10}P_1(\cos\theta_2) + P_1^1(\cos\theta_2)({}_2E_{11}\cos\varphi + {}_2\overline{E}_{11}\sin\varphi)\right] \\ \pi_2^H &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (38)$$

et en coordonnées d'origine O_1 :

$$\left.\begin{aligned} \pi_{21}^E &= \frac{1}{k}\sum_{nm} j_n(kr_1) P_n^m(\cos\theta_1)({}_{21}E_{nm}\cos m\varphi + {}_{21}\overline{E}_{nm}\sin m\varphi) \\ \pi_{21}^H &= \frac{1}{k}\sum_{nm} j_n(kr_1) P_n^m(\cos\theta_1)({}_{21}H_{nm}\cos m\varphi + {}_{21}\overline{H}_{nm}\sin m\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Pour déterminer les coefficients E_{nm} et H_{nm}, on tient compte de ce qu'avec les coordonnées utilisées, les composantes E_φ, H_φ, ont même valeur dans les deux systèmes. En séparant les composantes électriques et magnétiques :

$$ {}_2E^E_\varphi + {}_2E^H_\varphi = {}_{21}E^E_\varphi + {}_{21}E^H_\varphi ; \qquad {}_2H^E_\varphi + {}_2H^H_\varphi = {}_{21}H^E_\varphi + {}_{21}H^H_\varphi \tag{40}$$

et en remplaçant dans ces expressions les champs par leurs valeurs en fonction des potentiels, on a :

$$ \frac{1}{r_2 \sin\theta_2}\frac{\partial^2 r_2 \pi_2^E}{dr_2 d\varphi} + \frac{i\omega}{c}\frac{1}{r_2}\frac{\partial r_2 \pi_2^H}{d\theta_2} = \frac{1}{r_1 \sin\theta_1}\frac{\partial^2 r_1 \pi_{21}^E}{\partial r_1 \partial \varphi} + \frac{i\omega}{c}\frac{1}{r_1}\frac{\partial r_1 \pi_{21}^H}{\partial \varphi_1} \tag{41}$$

$$ -j\frac{\partial r_2 \pi_2^E}{r_2 \partial \theta_2} + \frac{1}{r_2 \sin\theta_2}\frac{\partial^2 r_2 \pi_2^H}{\partial r_2 \partial \varphi} = -j\frac{\partial r_1 \pi_1^E}{r_1 \partial \theta} + \frac{1}{r_1 \sin\theta_1}\frac{\partial^2 r_1 \pi_{21}^H}{\partial r_1 \partial \varphi} \tag{42}$$

avec $j = (\sigma + i\varepsilon\omega)/c$.

En remplaçant dans l'équation (41) les potentiels par leurs valeurs, et en tenant compte des formules (37), on obtient après quelques transformations, en comparant les termes en $\sin\varphi$ et $\cos\varphi$ à gauche et à droite les deux relations :

$$ \begin{aligned} k_2\bar{E}_{11}\Big\{ &\sum_\nu h_\nu^{(2)}(kR) j_\nu(kr_1)\left[P^1_{\nu+1}(\cos\theta_1) - P^1_{\nu-1}(\cos\theta_1)\right] \\ &- \sum_\nu (2\nu+3)\frac{h^{(2)}_{\nu+1}(kR)}{(kR)}\frac{j_{\nu+1}(kr_1)}{(kr_1)} P^1_{\nu+1}(\cos\theta_1)\Big\} \\ &= k\sum_\nu {}_{21}\bar{E}_{\nu 1}\left[j_{\nu-1}(kr_1) - \frac{\nu j_\nu(kr_1)}{kr_1}\right] P^1_\nu(\cos\theta_1) \\ &+ \frac{i\omega}{c}\sum_\nu j_\nu(kr_1)\,{}_{21}H_{\nu 1}\sin\theta_1 \cdot \frac{\partial P^1_\nu(\cos\theta_1)}{\partial\theta_1} \end{aligned} \tag{43}$$

$$ \begin{aligned} k_2 E_{11}\Big\{ &\sum_\nu h_\nu^{(2)}(kR) j_\nu(kr_1)\left[P^1_{\nu+1}(\cos\theta_1) - P^1_{\nu-1}(\cos\theta_1)\right] \\ &- \sum_\nu (2\nu+3)\frac{h^{(2)}_{\nu+1}(kR)}{kR}\frac{j_{\nu+1}(kr_1)}{kr_1} P^1_{\nu+1}(\cos\theta_1)\Big\} \\ &= k\sum_\nu {}_{21}E_{\nu 1}\left[j_{\nu-1}(kr_1) - \frac{\nu j_\nu(kr_1)}{kr_1}\right] P^1_\nu(\cos\theta_1) \\ &- \frac{i\omega}{c}\sum_\nu {}_{21}\bar{H}^1_\nu j_\nu(kr_1)\sin\theta_1 \cdot \frac{\partial P^1_\nu(\cos\theta_1)}{\partial\theta_1} \end{aligned} \tag{44}$$

Tenant compte de l'orthogonalité des fonctions qui interviennent et utilisant la formule de récurrence $j_u(z)/z = j_{u-1}(z) + j_{u+1}(z)$, Trinks

a pu déduire de ces deux relations les quatre expressions suivantes, qui permettent de déterminer les coefficients cherchés :

$$\left.\begin{aligned}
&{}_{21}\bar{E}_{u1}k\,\frac{u+1}{2u+1}+{}_{21}H_{u-1,1}\,\frac{i\omega}{c}\,\frac{(u-1)^2}{2u-1}={}_2E_{11}k\left[h_{u-1}^{(2)}(kR)-\frac{h_u^{(2)}(kR)}{kR}\right]\\
&{}_{21}\bar{E}_{u1}k\,\frac{u}{2u+1}+{}_{21}H_{u+1,1}\,\frac{i\omega}{c}\,\frac{(u+2)^2}{2u+3}={}_2E_{11}k\left[h_{u+1}^{(2)}(kR)+\frac{h_u^{(2)}(kR)}{kR}\right]\\
&{}_{21}E_{u1}k\,\frac{u+1}{2u+1}-{}_{21}H_{u-1,1}\,\frac{i\omega}{c}\,\frac{(u-1)^2}{2u-1}={}_2E_{11}k\left[h_{u-1}^{(2)}(kR)-\frac{h_u^{(2)}(kR)}{kR}\right]\\
&{}_{21}E_{u1}k\,\frac{u}{2u+1}-{}_{21}\bar{H}_{u+1,1}\,\frac{i\omega}{c}\,\frac{(u+2)^2}{(2u+3}={}_2E_{11}k\left[h_{u+1}^{(2)}(kR)-\frac{h_u^{(2)}(kR)}{kR}\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(45)$$

Les coefficients tels que ${}_{21}E_{u0}$ ne peuvent s'obtenir par les équations (45) ; on les déduit de la relation (44) ;

$${}_{21}E_{u0}=(2u+1)\,\frac{h_u^{(2)}(kR)}{kR}\,{}_2E_{10}.\qquad(46)$$

L'expression du potentiel diffracté par la sphère S_2, en coordonnées d'origine O_1 devient :

$$\left.\begin{aligned}
\pi_{21}^{E}=\frac{1}{k}\,j_1(kr_1)\Big\{&\frac{3h_1^{(2)}(kR)}{kR}\,P_1(\cos\theta_1)\,{}_2E_{10}+P_1^1(\cos\theta_1)\\
&\cdot\frac{3}{2}\left[h_0^{(2)}(kR)-\frac{h_1^{(2)}(kR)}{kR}\right]({}_2E_{11}\cos\varphi+{}_2\bar{E}_{11}\sin\varphi)\Big\}\\
&+\sum_{\nu>1}j_\nu(kr_1)P_\nu^\mu(\cos\theta_1)\,({}_{21}E_{\nu\mu}\cos\mu\varphi+{}_{21}\bar{E}_{\nu\mu}\sin\mu\varphi)
\end{aligned}\right\}\qquad(47)$$

On trouve une équation analogue pour π_{21}^{H}.

Cas où l'onde plane se propage perpendiculairement à la droite joignant les centres des deux sphères.

Dans ce cas, les coefficients des potentiels de diffraction de chaque sphère sont les mêmes. Il vient pour la sphère h_1 :

$$\left.\begin{aligned}
&\pi_1^{E}=\frac{1}{k}\,h_1^{(2)}(kr_1)\,E_{10}P_1(\cos\theta_1)+P_1^1(\cos\theta_1)\,(E_{11}\cos\varphi+\bar{E}_{11}\sin\varphi)\\
&\pi_1^{H}=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(48)$$

On obtiendrait une expression analogue pour S_2. Le champ diffracté par S_2 est donné en coordonnées d'origine O_1 par :

$$\left.\begin{aligned}
&\pi_{21}^{E}=\frac{1}{k}\,j_1(kr_1)\\
&\quad[E_{10}P_1(\cos\theta_1)\,F_0(R)+F_1(R)P_1^1(\cos\theta_1)\,(E_{11}\cos\varphi+\bar{E}_{11}\sin\varphi)]\\
&\quad+\frac{1}{k}\sum_{\nu>1}j_\nu(kr_1)P_\nu^\mu(\cos\theta_1)\,(E_{\nu\mu}^{*}\cos\mu\varphi+\bar{E}_{\nu\mu}^{*}\sin\mu\varphi)
\end{aligned}\right\}\qquad(49)$$

avec :

$$F_0(R) = \frac{3}{2}\frac{h_0^{(2)}(kR)}{kR}; \qquad F_1(R) = \frac{3}{2}\left[h_0^{(2)}(kR) - \frac{h_1^{(2)}(kR)}{kR}\right]. \quad (50)$$

Pour terminer le calcul, il suffit d'expliciter les coefficients E_{nm} qui sont donnés par la théorie de Debye. On obtient finalement pour le champ total incident sur S_1 :

$$\left.\begin{aligned}\pi^E = \frac{1}{k} j_1(kr_1)\,[E_{10}F_0(R)P_1(\cos\theta_1) + \left(E_{11}F_1(R) + \frac{3}{2}\right)P_1^1(\cos\theta_1)\cos\varphi \\ + \overline{E}_{11}F_1(R)P_1^1(\cos\theta_1)\sin\varphi] + \frac{1}{k}\sum_{\nu>1} j_\nu(kr_1)C^*_{\nu\mu}(\theta_1, \varphi)\end{aligned}\right\} \quad (51)$$

En écrivant l'expression du potentiel diffracté par S_1 comme ci-dessus (48), les conditions aux limites sur la sphère S_1 donnent :

$$\left.\begin{aligned} &E_{10} = C_1F_0E_{10}, && \text{d'où} && E_{10} = 0 \\ &E_{11} = C_1(F_1E_{11} + 3/2), && \text{d'où} && E_{11} = \frac{3}{2}C_1\frac{1}{1 - C_1F_1} \\ &\overline{E}_{11} = 0 \end{aligned}\right\} \quad (52)$$

L'intensité diffractée par une sphère étant sensiblement égale à $|\ E_{11}\ ^2$, la variation d'intensité due à l'interaction des deux sphères est donnée par le facteur multiplicatif : $1/(1 - C_1F_1)^2 = \frac{1}{|D|^2}$.

Trinks a montré que si le diamètre des sphères est petit par rapport à la longueur d'onde, on a :

$$|\ D\ |^2 = 1 - 2\left(\frac{a}{R}\right)^3 \mathbf{a}' + \left(\frac{a}{R}\right)^6 |\ \mathbf{a}\ |^2. \quad (53)$$

a = rayons des sphères, R = distance des centres, $\mathbf{a}$ et $\mathbf{a}'$ sont des coefficients tabulés par Mie.

Cas où l'onde plane se propage dans la direction de la droite joignant les centres des sphères.

Le problème se résout comme dans le cas précédent, si ce n'est que les coefficients des potentiels des ondes diffractées par chaque sphère sont différentes, ce qui oblige à effectuer deux fois les calculs ci-dessus, de manière à introduire les conditions aux limites sur les deux sphères successivement. On obtient finalement :

$$\left.\begin{aligned} &{}_1E_{10} = {}_2E_{10} = {}_1\overline{E}_{11} = {}_2E_{11} = 0 \\ &{}_1E_{11} = \frac{3}{2}C_1\frac{1 + C_1F_1(R)e^{ikR}}{1 - (C_1F_1(R))^2}; \qquad {}_2E_{11} = \frac{3}{2}C_1\frac{e^{ikR} + C_1F_1(R)}{1 - (C_1F_1(R))^2} \end{aligned}\right\} \quad (54)$$

Lorsque les sphères sont très petites et très rapprochées $e^{ikR} = 1$ et les facteurs multiplicatifs sont égaux à ceux du premier cas.

II) **Cas de plus de 2 sphères.** — La généralisation au cas de plusieurs sphères est immédiate. Il faut abandonner l'hypothèse simplificatrice concernant la disposition des axes de coordonnées, que l'on pourra par exemple remplacer par un choix d'axes parallèles. Il y aura alors N systèmes d'équations à résoudre et non plus 2.

Nous conclurons en remarquant que la théorie de Trinks est valable avec la même généralité que celle de Mie-Debye, puisque aucune hypothèse supplémentaire n'a été utilisée pour la formuler. Cependant, la complexité des formules obtenues est si grande qu'on ne peut effectuer les calculs numériques que dans le cas de la diffusion Rayleigh. Le résultat classique « interaction négligeable dès que l'intervalle entre sphères dépasse le double du diamètre » n'est donc établi que pour les très petites sphères.

Il nous a semblé intéressant d'étendre expérimentalement, à des sphères dont le diamètre est de l'ordre de la longueur d'onde, le résultat ci-dessus : c'est ce que nous verrons au chapitre V. Ceci permettrait de l'appliquer à la propagation de la lumière dans les pluies, les brouillards et les nuages.

CHAPITRE III

Phénomènes de diffraction produits, au voisinage de l'axe, par une sphère isolée dans l'espace.

L'étude expérimentale de la diffraction par une sphère conductrice isolée dans l'espace, nous a permis de préciser le comportement des ondes électromagnétiques, au voisinage immédiat de l'obstacle et de vérifier l'exactitude des résultats fournis par notre appareil.

I) **Répartition d'intensités à grande distance des sphères.** — 1) **Méthode expérimentale.** — Le montage utilisé est décrit chapitre premier (fig. 1), à ceci près qu'on utilise un petit cornet *c* comme sonde réceptrice et qu'on interrompt le trajet de comparaison de phase. La sphère est disposée à 40 cm en avant du cornet émetteur C, région où le champ est à peu près plan et constant dans tout l'espace qu'occupent les plus grosses sphères étudiées. Le cornet *c* se déplace sur le banc BB′, à 48 cm minimum de la sphère. Le champ incident est polarisé linéairement, le vecteur $\vec{E}$ étant soit parallèle, soit perpendiculaire à BB′. On passe d'une polarisation à l'autre en interposant entre le mesureur Mos

et l'adaptateur Ad une section hélicoïdale (90° twist). Une méthode analogue permet de changer la polarisation reçue par le cornet *c*.

Notons que le changement de polarisation d'émission (fig. 2) est équivalent à une rotation de 90° du banc BB′ autour de l'axe AA′. Nous avons vérifié (comme le veut la théorie) que sur les deux trajectoires AA′ et BB′ le champ total $(\vec{E'} + \vec{E^s})$ est parallèle au champ incident [18].

La directivité du cornet récepteur peut constituer une cause d'erreurs. Pour l'éviter, nous avons choisi un diagramme de réception formé d'un seul lobe très large. Les mesures sont alors correctes, quand on maintient l'axe du cornet parallèle à AA′.

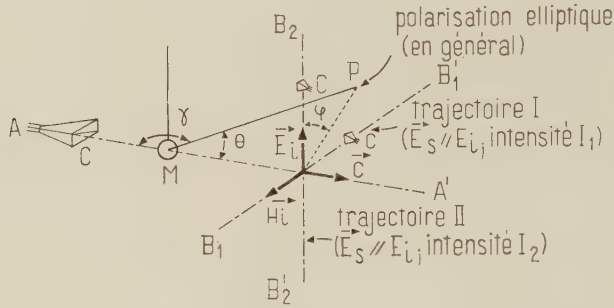

Fig. 2. — Dispositif pour les mesures d'intensité à grande distance des sphères.

Nous avons étudié une série de billes d'acier pour roulements, de diamètres échelonnés entre 0,95 et 10,16 cm ($\alpha = 2{,}9$ à $21{,}3$). Ces billes sont parfaitement sphériques (les écarts avec la sphère théorique n'atteignant pas le micron) et possèdent le poli spéculaire.

2) **Résultats.** — Les courbes ont été tracées en portant, en abscisses, les déplacements linéaires du chariot, ainsi que les angles θ (fig. 3), le zéro correspondant au passage par l'axe ; en ordonnées, les élongations du millivoltmètre, qui sont proportionnelles à $|\vec{E}|^2$.

Les enregistrements présentent fréquemment une légère asymétrie due aux imperfections du réglage. Pour l'éliminer et afin de pouvoir superposer plusieurs courbes sur une même figure, nous traçons le diagramme à l'endroit, puis à l'envers du calque et nous prenons la moyenne des deux tracés ainsi obtenus [21]. Nous utilisons ce même procédé dans les chapitres suivants.

On a représenté sur chacune des figures les diagrammes d'émission du cornet C. Ils sont légèrement différents par suite d'imperfections

dans la réalisation mécanique de ce cornet. Notons que les tracés ne sont définis qu'à quelques millimètres près.

La figure 3 représente le diagramme de diffraction des sphères lorsque le champ électrique incident est perpendiculaire au déplacement de

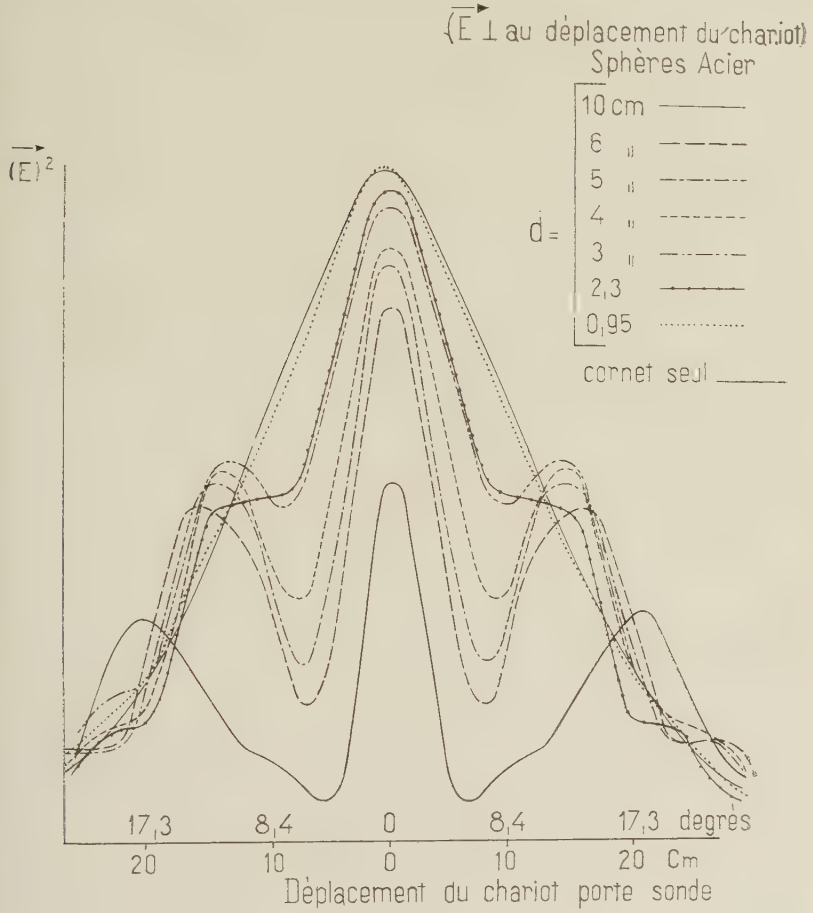

Fig. 3. — Répartition d'intensités.

la sonde. Les diagrammes ont la même allure générale lorsque le champ lui est parallèle. Les deux trajectoires correspondantes pour la sonde sont numérotées respectivement I et II (fig. 2).

Le fait essentiel qui se dégage de l'examen de ces courbes est la présence, au centre de l'ombre géométrique, d'un maximum d'in-

tensité. Il s'agit là d'un résultat nouveau, que seule permettrait de prévoir une extrapolation hasardeuse des phénomènes connus en optique [5].

Lorsque le diamètre des sphères varie, le diagramme se modifie comme suit : au voisinage du maximum central, la plus petite sphère (1 cm) n'a qu'une action négligeable. Si le diamètre augmente, on note l'apparition de maxima secondaires de plus en plus accentués, en même temps que le maximum central s'affine.

3) **Prévisions de la théorie de Mie.** — Nous ne considérons ici que la somme géométrique $\vec{E}^i + \vec{E}^s$ des champs électriques incident et diffracté. Nous allons modifier l'expression de $\vec{E}^s$ (chap. II) en y introduisant les développements asymptotiques des fonctions de Bessel et de Hankel [37] :

$$H_\rho^{(2)}(Z) = J_\rho(Z) - j\,.\,N_\rho(Z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,.\,e^{-j\left(Z - \frac{2\rho+1}{4}\pi\right)}$$

ce qui est possible, puisque l'on se limite à des points situés à grande distance de la sphère diffringente.

Tous calculs faits, on obtient pour les composantes en coordonnées polaires du champ diffracté :

$$E_r^s = 0$$

$$E_\theta^s = -j\,\frac{E_0}{kr}\,e^{j\omega t - jkr}\sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)}\left[a_n^s\,\frac{P_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + b_n^s\,\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{d\theta}\right]\cos\varphi$$

$$E_\varphi^s = +\,j\,\frac{E_0}{kr}\,e^{j\omega t - jkr}\sum_n \frac{2n+1}{n(n+1)}\left[a_n^s\,\frac{dP_n^1(\cos\theta)}{\sin\theta} + b_n^s\,\frac{P_n^1(\cos\theta)}{d\theta}\right]\sin\varphi.$$

Sous cette forme, on constate que :

a) Sur la trajectoire I, $\varphi = 0$, $E_\varphi^s = 0$, il reste E_θ^s, avec $\cos\varphi = 1$. La radiation est totalement polarisée, son vecteur électrique vibre dans le plan passant par la direction de propagation et par le vecteur champ électrique de l'onde incidente.

b) Sur la trajectoire II, $\varphi = \pi/2$, $E_\theta^s = 0$, il reste E_φ^s avec $\sin\varphi = 1$. La vibration diffractée est totalement polarisée, son vecteur électrique vibre parallèlement au vecteur électrique du champ incident.

c) Pour toutes les positions intermédiaires, E_φ^s et E_θ^s ont des valeurs non nulles, excepté peut-être dans des directions bien définies. La vibration résultante est en générale elliptique, la nature complexe des coefficients de diffraction faisant que les deux champs électriques rectangulaires ne sont pas en phase.

On remarque, d'autre part, que les répartitions d'intensité suivant

les trajectoires I et II sont différentes. L'expérience confirme toutes ces prévisions.

Utilisant la théorie originale de Mie, Blumer [2] a calculé les intensités du champ électrique diffracté dans les plans $\vec{E}, \vec{c}$ et $\vec{H}, \vec{c}$. Elles ont pour expression :

$$I_1 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} i_1 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \pi_n + P_n [x\pi_n - (1-x^2)\pi'_n] \right\} \right|^2$$

$$I_2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} i_2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n [x\pi_n - (1-x^2)\pi'_n] + P_n \pi_n \right\} \right|^2$$

avec :

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1/2}(2n+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{S'_n(\beta) S_n(\alpha) - m S'_n(\alpha) S_n(\beta)}{S'_n(\beta) \varphi_n(\alpha) - m \varphi'_n(\alpha) S_n(\beta)}$$

$$P_n = \frac{(-1)^{n+3/2}(2n+1)}{n(n+1)} \cdot \frac{m S_n(\alpha) S'_n(\beta) - S_n(\beta) S'_n(\alpha)}{m \varphi_n(\alpha) S'_n(\beta) - S_n(\beta) \varphi'_n(\alpha)}$$

dans lesquelles $x = 2\pi a : \lambda$ (a : rayon de la sphère), $\beta = mx$ (m : indice), $\pi_n(x) = \frac{\partial P_n(x)}{\partial x}$ (P_n : polynôme de Legendre de degré n), $x = \cos\gamma$ (γ : angle que fait la direction d'observation avec l'inverse de la direction de propagation), et :

$$S_n(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} J_{n+1/2}(\alpha), \quad C_n = \sqrt{\frac{\pi\alpha}{2}} J_{-n-1/2}(\alpha), \quad \varphi_n(\alpha) = S_n(\alpha) + jC_n(\alpha).$$

L'accent (′) indique la dérivation par rapport à l'argument x ou β.

Les diagrammes de Blumer montrent bien la dissymétrie des phénomènes dans les deux plans $\vec{E}, \vec{c}$ et $\vec{H}, \vec{c}$. Si l'on considère un plan d'observation passant par $\vec{c}$ et faisant un angle quelconque avec $\vec{E}$, les phénomènes sont complexes (voir Mie). Il faut d'ailleurs remarquer que les quantités I_1 et I_2 se rapportent à la lumière diffusée par la sphère ($\vec{E}^s$) et non au phénomène de diffraction, qui résulte de l'interférence de la lumière diffusée et de la lumière incidente ($\vec{E}^s + \vec{E}^i$).

4) **Comparaison avec les mesures effectuées en optique.** — Les mesures effectuées en optique étant très nombreuses, nous nous bornons à indiquer quelques ouvrages pourvus de bibliographies importantes [16, 18, 27, 30]. La plupart des déterminations sont relatives à des diagrammes de diffusion.

Dans la région de transition entre le rayonnement Rayleigh et le domaine d'application possible de l'optique physique (théorie de Wiener), les diamètres des particules sont de l'ordre d'une fraction de μ à quelques μ. D'où une double difficulté : d'une part, obligation

d'opérer sur une suspension, d'autre part, impossibilité de connaître les formes géométriques des particules diffringentes. Enfin, il convient de rappeler que, sous faible épaisseur, on ne peut plus parler de corps parfaitement réfléchissants, les métaux eux-mêmes étant transparents et souvent cristallins. En conséquence, les mesures sont pénibles et peu précises.

Des études théoriques et expérimentales, utilisant le principe d'Huyghens, ont été effectuées, en particulier par Lommel [24], sur la diffraction par des trous et écrans circulaires (ce dernier cas étant du point de vue optique physique analogue à celui de la sphère). Ce sont là les déterminations optiques les plus voisines des nôtres et il suffit de se reporter au mémoire de Lommel pour constater la supériorité de notre méthode.

De là, le grand intérêt des études effectuées en ondes centimétriques, intérêt qui ne fera que se confirmer au cours des chapitres suivants.

II) Répartition d'intensités dans l'axe, en arrière et au voisinage immédiat des sphères conductrices. — 1) **Méthode expérimentale.** — On utilise le dispositif représenté figure 4, modification de l'appareil-

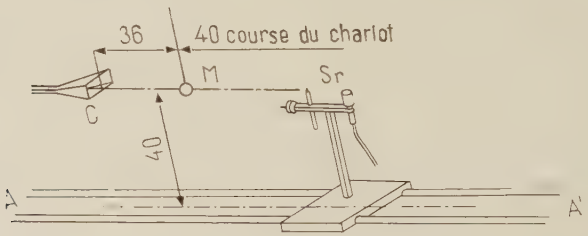

Fig. 4. — Dispositif pour les mesures d'intensité au voisinage immédiat des sphères.

lage d'étude au voisinage de l'axe (fig. 1, chap. I[er]). Le récepteur est constitué par la sonde coaxiale Sr accouplée directement à la tête détectrice. Le chariot porte-sonde se déplace sur le banc AA'; on amène l'antenne au contact de la sphère, puis on l'en écarte tout en enregistrant les intensités.

Des précautions ont été prises pour éviter les réflexions sur le porte-sonde : toutes les parties métalliques sont recouvertes de cartons imprégnés d'oxyde de fer. Les réflexions sur les murs et objets avoisinant la sphère ont été réduites au minimum par l'emploi de panneaux absorbants.

2) **Résultats.** — Ils sont représentés figure 5. On a porté, en abscisses, les distances de l'antenne à la sphère, en ordonnées, les intensités correspondantes.

Les courbes enregistrées présentent de nombreuses indentations (non figurées ici) qui correspondent aux résidus de réflexions parasites et se reproduisent à chaque mesure.

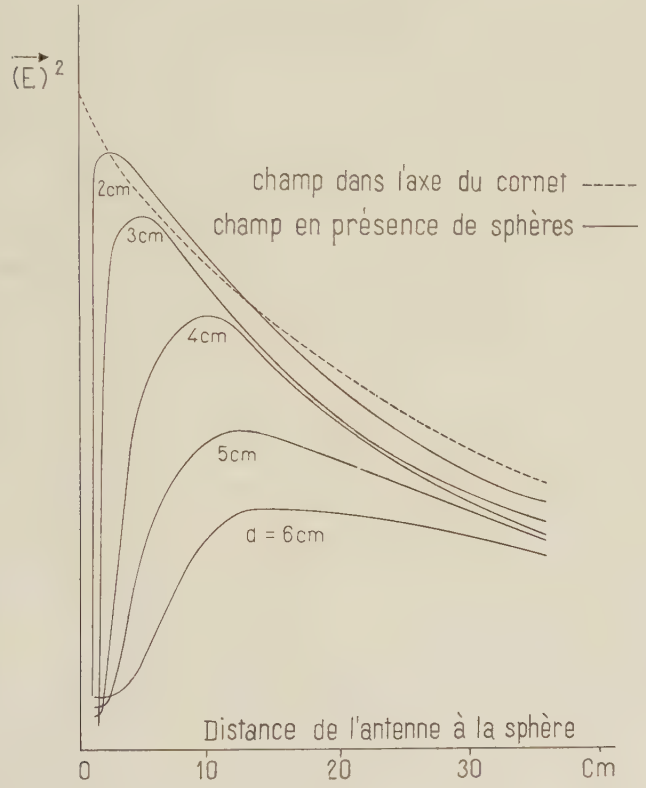

Fig. 5. — Répartition d'intensités.

Les courbes expérimentales (fig. 5) se rapportent aux sphères de diamètres 2, 3, 4, 5 et 6 cm. Elles sont tracées en prenant la position moyenne des indentations.

On constate que le champ, nul au contact de la sphère, redevient très vite à peu près égal à ce qu'il est en l'absence de sphère. La remontée se produit d'autant plus vite que le diamètre de la sphère est plus petit.

Ce résultat confirme et précise le phénomène bien connu d'optique

physique : présence d'un point lumineux au centre de l'ombre géométrique portée par une sphère. Cette étude montre, de plus, ce que ne pouvait faire l'optique, que *ce point lumineux existe déjà à de très courtes distances de la sphère : de l'ordre du double du diamètre.*

3) **Comparaison avec la théorie de Mie.** — Nous avons calculé d'après la théorie de Mie la répartition d'intensités, dans l'axe du système, en arrière de la sphère. Pour cela, nous plaçant dans l'hypothèse du

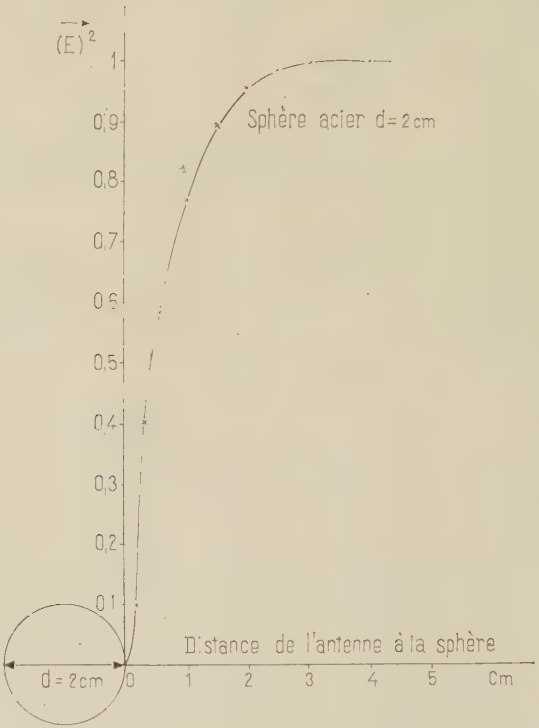

Fig. 6. — Répartition théorique d'intensités.

chapitre II — onde plane incidente polarisée rectilignement — nous déterminons la somme des champs électriques incident et diffracté le long du segment AA′ de la droite Oz.

La figure 6 représente la répartition théorique d'intensités dans le cas de la sphère de diamètre 2 cm. Nous avons choisi cette dernière comme exemple, car c'est dans ce cas que l'étendue des tables dont nous disposons permet de déterminer l'intensité assez loin de la sphère.

Les phénomènes sont analogues à ceux que l'on observe expérimen-

talement. L'intensité, nulle au contact de la sphère (le champ électrique devant être normal au conducteur) croît rapidement avec l'éloignement et atteint la même valeur que le champ électrique non perturbé, dès que la distance de l'antenne à la sphère atteint 4 cm, soit le double de son diamètre.

Nous constatons quelques différences avec la courbe expérimentale correspondante. Nous les attribuons, d'une part, au fait que nous ne sommes pas dans les conditions idéales (champ pas tout à fait plan, sonde présentant une certaine épaisseur), d'autre part, à l'influence de la sonde sur la sphère. L'accord est toutefois satisfaisant.

4) **Note concernant les calculs.** — La détermination du champ dans l'axe s'effectue en trois étapes :

a) Calcul des coefficients a_n^* et b_n^*. — Le premier se déduit directement des tables de fonctions de Bessel [25], le second nécessite la détermination préalable des fonctions $d\mathrm{S}_n(z)/dz$ et $d\mathrm{E}_n(z)/dz$, qui s'effectue en appliquant la relation de récurrence $d\mathrm{S}_n(z) = zj_{n-1}(z) - nj_n(z)$ et une formule identique pour $d\mathrm{E}_n(z)/dz$. La suite des opérations est longue, mais sans difficulté.

b) Calcul de l'énergie diffractée. — C'est l'étape la plus pénible, les séries obtenues ne convergeant que très lentement. Les termes ont des signes alternés et leurs différences sont faibles, il faut, pour avoir quelques précisions, déterminer chacun d'eux avec un grand nombre de décimales.

c) Addition des énergies incidente et diffractée. — On prend comme référence de phase, celle de l'onde incidente au centre de la sphère et l'on effectue la somme trigonométrique.

Nous avons observé qu'il faut, dans le calcul de ces séries, tenir compte d'un nombre de termes sensiblement supérieur à la valeur de $\alpha = 2\pi a/\lambda$, ce qui est contraire à la règle de Debye [19, 25]. Cependant, la décroissance des termes à partir de ce rang devient très rapide comme permet de le constater la lecture des tables de coefficients de diffraction.

5) **Remarques.** — Les méthodes optiques ne permettent pas d'effectuer directement d'expériences analogues. Aucune comparaison ne peut être cherchée dans ce sens. Nos résultats expérimentaux montrent que les mesures au voisinage des sphères diffringentes sont réalisables, ce qui est loin d'être évident *a priori*. Nous pensons, néanmoins, qu'il faut se montrer très prudent si l'on veut étendre cette conclusion à d'autres cas, et nous n'estimons pas avoir prouvé que ce résultat soit valable pour toutes les structures possibles d'objets diffringents. Toutefois,

nous avons pu préciser le comportement des ondes au voisinage immédiat de la sphère, en particulier le processus de contournement de ces dernières.

III) **Surfaces équiphases à grande distance des sphères.** — 1) **Méthode expérimentale.** — Les mesures s'effectuent sur le dispositif de la figure 1 (chap. I[er]). On utilise comme sonde réceptrice le petit cornet *c*, l'énergie captée par l'antenne Sr étant insuffisante.

Les déterminations de phase sont réalisées par déplacement, d'avant en arrière, du cornet *c*, le chariot porte-sonde étant mobile sur la plaque P. On les a contrôlées par la méthode des trois enregistrements successifs.

Les études ont porté sur la même série de sphères que lors des mesures d'intensité.

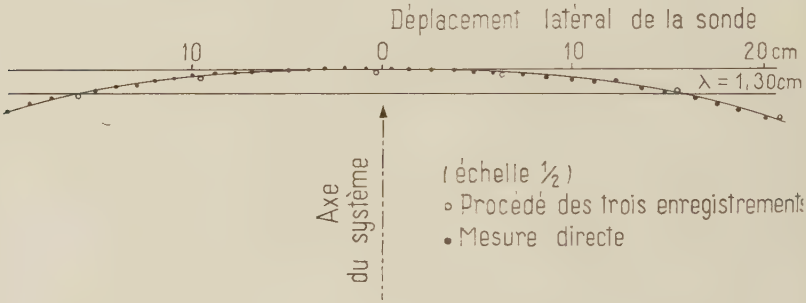

Fig. 7. — Surface d'onde à 60 cm en arrière du cornet émetteur.

2) **Résultats.** — La figure 7 représente la surface d'onde à 60 cm en avant du cornet émetteur. On a porté à la fois les points obtenus par détermination directe et ceux qu'a fourni le procédé des trois enregistrements.

La figure 8 représente les portions de surface d'onde au voisinage de l'axe du système, lorsqu'on a disposé les sphères de 4, 5 et 6 cm à 40 cm du cornet émetteur. On a tracé, pour comparaison, les portions de surfaces d'onde correspondantes créées par celui-ci.

Les points expérimentaux mettent en évidence une dispersion assez importante, mais qui ne doit pas surprendre. Le procédé des trois enregistrements successifs utilisant trois déterminations d'intensités, les erreurs commises dans chaque cas s'ajoutent. La mesure directe impose la présence de l'opérateur dans le champ, d'où des perturbations inévitables de ce dernier. D'autre part, l'utilisation du cornet au lieu d'antenne coaxiale comme sonde réceptrice constitue aussi un inconvénient.

L'emploi des méthodes précédentes nous donne une précision de l'ordre de $\lambda/10$, ce qui ne constitue pas une très bonne détermination. Néanmoins, ce dispositif de mesure de phase a joué un rôle essentiel dans notre travail : il nous a permis de contrôler la forme des surfaces d'onde au point où nous plaçons les corps diffringents et de vérifier que les conditions théoriques de planéité du champ étaient remplies.

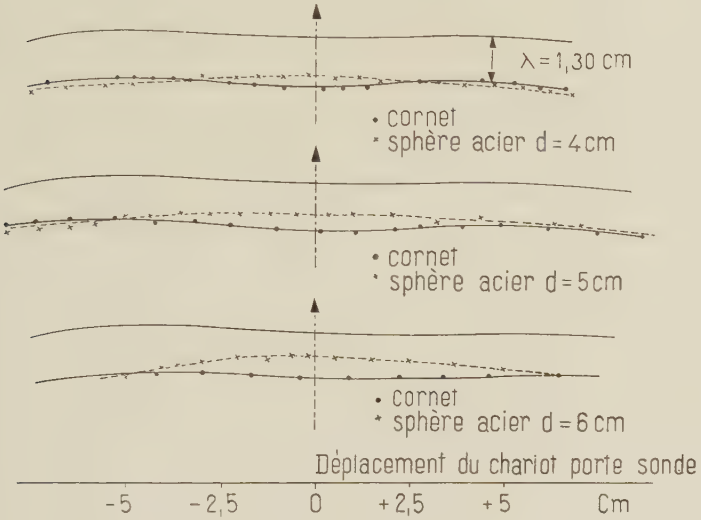

Fig. 8. — Surfaces d'onde en présence des sphères.

CHAPITRE IV

Sections efficaces radar de sphères isolées dans l'espace.

I) **Définition. Propriétés.** — On appelle *section efficace radar* d'un obstacle le rapport de l'énergie, par unité d'angle solide, qu'il renvoie en direction inverse de la propagation, à la densité d'énergie incidente sur l'obstacle [25]. Cette grandeur croît indéfiniment avec le rayon de la sphère; c'est pourquoi nous utiliserons, de préférence, son rapport à la section droite géométrique de l'obstacle. C'est un nombre sans dimension qui, dans le cas des sphères parfaitement réfléchissantes, tend vers l'unité quand le rayon de la sphère croît indéfiniment.

La section efficace radar se détermine en évaluant la composante du vecteur de Poynting dirigée en sens inverse de la direction de propagation, la distance à la sphère diffringente étant supposée très grande. On peut aussi se contenter de déterminer la composante du champ électrique diffracté parallèle au champ électrique incident et qui se propage en sens inverse de l'énergie. Ces deux procédés sont équivalents, puisque l'on se trouve par hypothèse à grande distance de la sphère.

Avec les notations de Stratton, l'énergie renvoyée vers la source s'écrit :

$$S_R(\pi) = \frac{\lambda^2}{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n + 1/2)(a_n^s - b_n^s) \right|^2$$

et avec les notations de Mie :

$$S_R(\theta) = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \{ n(n+1)(A_n + P_n) \} \right|^2.$$

Nous indiquerons cette dernière expression, car la plupart des tables de coefficients de diffraction publiées à ce jour ont été déterminées selon la théorie originale de Mie.

Du point de vue pratique, la section efficace radar représente l'intensité des échos reçus par un radar dirigé vers un obstacle, quand la distance et les caractéristiques de l'appareil sont fixées. En optique, elle représente l'illumination apparente d'un obstacle, éclairé par un projecteur et examiné à partir d'un point situé au voisinage de ce dernier (distance, puissance et longueur d'onde de la source étant constantes).

II) **Méthode de mesure.** — 1) **Dispositif expérimental.** — Les procédés classiques de mesure des sections efficaces radar [19, 25] sont inappli-

Fig. 9. — Dispositif expérimental.

cables dans les conditions où nous travaillons ; c'est pourquoi nous avons mis au point la méthode suivante : la sphère à étudier, disposée en avant du cornet émetteur, est suspendue à une crémaillère mobile d'avant en arrière, dans la direction de propagation. Un cornet récepteur, situé immédiatement en dessous du cornet émetteur, capte l'énergie renvoyée en direction de la source et la dirige vers la tête détectrice (fig. 9).

Ce dispositif est monté sur les bancs d'optique figure 1 (chap. Ier). La crémaillère est fixée à un portique supporté par la base de l'appareillage. Elle est entraînée par un petit moteur à rotation très lente et réversible, qui permet de déplacer la sphère étudiée sans lui communiquer de balancement.

2) **Principe.** — L'énergie parvient au récepteur par deux processus :

1° Une fraction, celle que nous désirons déterminer, est renvoyée vers la source par la sphère considérée.

2° Le reste provient du couplage direct, entre cornets, des réflexions parasites, etc...

Pour déterminer la grandeur de la réflexion due à la sphère, nous la déplaçons, d'avant en arrière, de quantités égales à environ une longueur d'onde, et nous enregistrons l'intensité reçue par le détecteur en fonction du déplacement. Ce mouvement laisse inchangée l'énergie parasite, dont nous prenons la phase comme référence. La phase de la portion réfléchie sur la sphère varie de 2π quand la distance croît de $\lambda/2$, mais on peut admettre que son intensité reste invariable, car le déplacement est faible par rapport à la distance sphère-cornets. L'intensité reçue, somme géométrique des deux portions considérées ci-dessus, présente des extrema qu'il suffit d'enregistrer pour en déduire l'énergie réfléchie par la sphère.

Ce procédé suppose que l'énergie reçue est inférieure à l'énergie parasite. On maintient leur différence à une valeur assez forte, pour éviter les non-linéarités qui sont dues au souffle de l'appareil. Pour cela on dispose, si besoin est, dans le champ des cornets, des réflecteurs additionnels convenables.

3) **Justification de notre méthode.** — Elle est sujette à diverses critiques :

1° La distance entre cornets et sphère est inférieure au minimum $R = 2(D_1 + D_2)^2/\lambda$, postulé par Mentzer [25] (D_1, ouverture maximum de l'antenne ; D_2, dimension maximum de l'obstacle ; λ, longueur d'onde).

2° L'énergie reçue par le cornet récepteur n'est pas dirigée exactement en sens inverse de la direction d'émission.

3° Ce procédé ne fournit que des valeurs relatives de l'énergie.

Nous réfutons en bloc les deux premières objections, en constatant le bon accord des résultats fournis par notre appareil avec ceux que prévoit la théorie de Mie pour des sphères parfaitement réfléchissantes. Quant à la troisième, nous verrons qu'il est possible d'étalonner l'appareil et d'obtenir ainsi des résultats en valeurs absolues.

Notons qu'il existe une méthode due à King [20] qui permet les déterminations directement en valeurs absolues. Elle n'est pas applicable dans notre cas, car elle suppose l'élimination totale de l'énergie parasite. Les résultats qu'elle a fournis ne sont pas plus précis que les nôtres (§ 3).

III) **Étude des sphères parfaitement réfléchissantes.** — 1) **Résultats.** — Nous avons utilisé une série de billes d'acier pour roulements de diamètres compris entre 2 et 18 mm. Leur sphéricité peut être considérée comme parfaite, l'écart entre les divers diamètres d'une même bille n'atteignant pas le micron, soit $\lambda/10\,000$. Elles sont collées avec

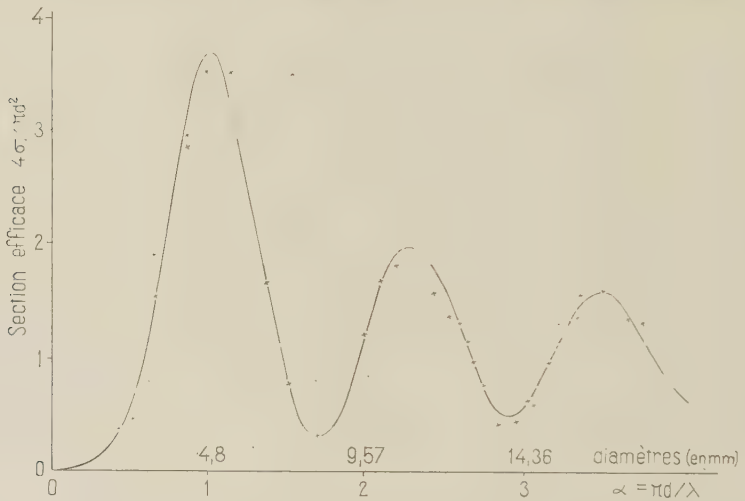

Fig. 10. — Energie réfléchie par des sphères métalliques (courbe théorique et points expérimentaux).

une trace de collodion à un fil attaché à la crémaillère. Nous avons vérifié que le fil seul, portant des traces de collodion trois ou quatre fois supérieures à celle qu'on utilise pour la fixation n'introduit aucune perturbation. Pour plus de sécurité, nous avons recommencé plusieurs fois chaque détermination avec des billes différentes, de même diamètre, ce qui a permis de constater que le mode de suspension n'intervient pas dans les résultats.

Le calcul de la section efficace s'effectue comme suit : soient M et m les valeurs respectives d'un maximum et d'un minimum enregistrés, qui sont proportionnelles aux intensités du champ. Le détecteur étant quadratique, les amplitudes correspondantes sont $\sqrt{M}$ et $\sqrt{m}$. La diffé-

rence $\sqrt{M} - \sqrt{m}$ représente le double de l'amplitude réfléchie par la sphère et $(\sqrt{M} - \sqrt{m})^2$ la section efficace en unités arbitraires.

Nous avons tracé (fig. 10) la courbe théorique du rapport section efficace/section géométrique, d'après les tables de J. S. Hey et al. [13], puis nous avons indiqué sur la même figure nos résultats expérimentaux. On porte, en abscisses, les valeurs des diamètres, ainsi que les paramètres α correspondants. Les ordonnées s'obtiennent en multipliant nos valeurs expérimentales en unités arbitraires par un coefficient constant choisi de manière à obtenir le meilleur accord moyen avec la courbe théorique.

La concordance est bonne, les seules divergences sensibles se manifestent au voisinage des premier et second maxima. Notre méthode fournit donc des résultats corrects et peut se transformer en un procédé de mesure absolue, au prix d'un étalonnage préalable.

2) **Remarque.** — Notons que quelques mesures de sections efficaces radar ont déjà été publiées. Laissant de côté les résultats obtenus au radar qui sont fort imprécis, nous citerons le travail de Aden [1] qui emploie la méthode de King et celui de Hey et al. [13] qui mesurent directement l'énergie réfléchie par une sphère mobile et éliminent les réflexions parasites par emploi de l'effet Doppler. La première méthode, comme la nôtre, arrive à une bonne concordance générale avec la courbe théorique, et présente des écarts du même ordre au voisinage des maxima. La seconde semble arriver à un meilleur accord, autant du moins que permet d'en juger la courbe des sections efficaces. Soulignons toutefois que ces deux auteurs ont travaillé à des longueurs d'onde plus grandes (Aden à 16 cm, Hey à 3 cm) en utilisant des appareils encombrants et un luxe de moyens techniques.

IV) **Étude de sphères diélectriques.** — 1) **Cas de diélectrique sans perte.** — Nous avons appliqué la méthode précédente à l'étude de la section efficace radar de sphères formées d'un diélectrique parfait, l'indice aussi voisin que possible de 1,33 (indice de l'eau dans le visible). Ce choix lie notre problème aux questions de transparence de l'atmosphère pour les radiations lumineuses et nous permet d'utiliser les nombreux calculs effectués par les opticiens à cette occasion.

a) Préparation des sphères. — Les tables de Von Hippel [14] indiquent que les corps les mieux adaptés à cette étude sont le téflon, la paraffine et la cire d'abeille. Le premier a été éliminé par suite de son prix trop élevé, la paraffine est difficile à couler, la cire a une constante de pertes assez forte. Nous avons utilisé un mélange commercial de paraffine et de cire : la cytoparaffine.

Il est impossible de mouler les sphères par suite du retrait que subit

la matière à la solidification. Nous avons décidé de les tailler à partir de gros blocs qu'on peut obtenir homogènes et sans bulle en utilisant le phénomène de trempe. Pour cela, on verse la cytoparaffine liquide dans des boîtes de carton mince flottant sur de l'eau à 0°. Le retrait s'effectue sur toutes les faces de la boîte, surtout en leurs centres et les bords fournissent une matière utilisable [6, 22].

Les sphères sont taillées au couteau de 1,2 mm en 1,2 mm, au fur et à mesure de l'enregistrement. Ce procédé est commode et assez rapide. En opérant soigneusement, on arrive à des erreurs de forme, sur le diamètre, inférieures à 2.10 mm par rapport à la sphère théorique.

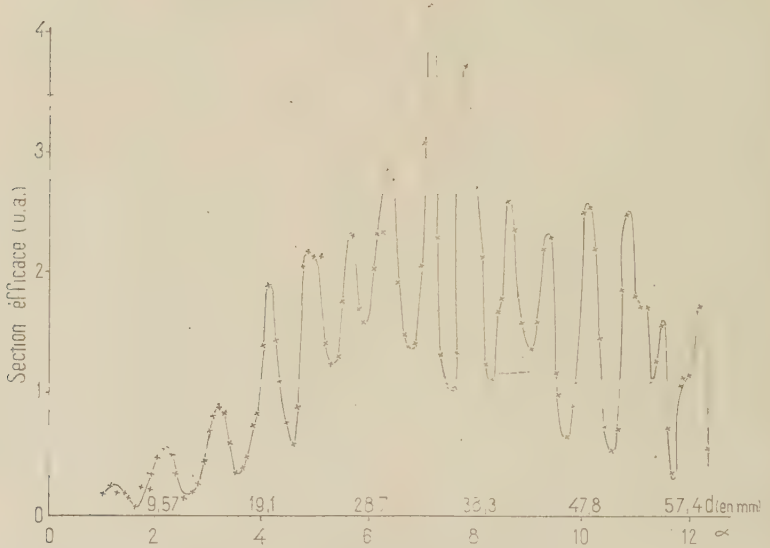

Fig. 11. — Energie renvoyée vers la source par des sphères de cytoparaffine ; $n = 1{,}5$.

b) Résultats. — Chaque série de mesures a porté sur une centaine de sphères de diamètres échelonnés entre 60 et 4 mm.

La figure 11 représente la courbe obtenue lors de l'une série de mesures. On a porté, en abscisses, le diamètre et le paramètre x, en ordonnées, le rapport section efficace section géométrique, en unités arbitraires.

L'allure moyenne est la même que dans le cas des sphères parfaitement réfléchissantes, mais on remarque la présence de nombreuses indentations profondes et sensiblement équidistantes.

L'expérience a été répétée plusieurs fois, sur des séries différentes de sphères, afin de vérifier que les phénomènes observés ne sont pas dus

aux irrégularités de surfaçage. Dans tous les cas, les indentations se sont reproduites pour les mêmes valeurs des diamètres, seules leurs amplitudes varient quelque peu.

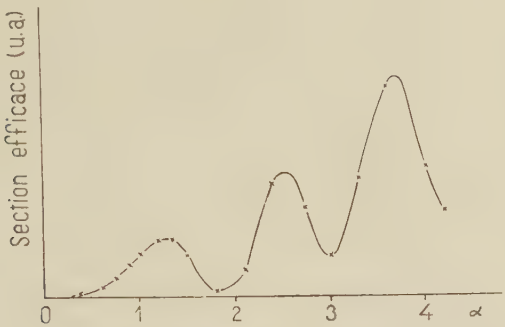

Fig. 12. — Sections efficaces de sphères d'indice 1,33 (d'après calcul).

c) Prévisions de la théorie de Mie. — Nous avons calculé, selon la théorie de Mie, la section efficace radar de sphères d'indices 1,33, pour lesquelles les coefficients de diffraction sont connus à intervalles serrés jusque pour $\alpha = 4{,}2$ [15].

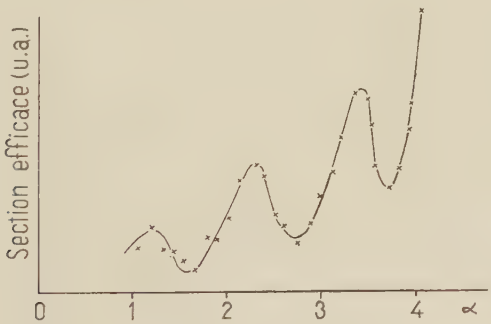

Fig. 13. — Sections efficaces expérimentales de sphères de cytoparaffine ; $n = 1{,}5$.

La figure 12 représente le résultat obtenu, et nous avons tracé, pour comparaison, avec la même échelle pour les abscisses, les premières indentations de la courbe expérimentale de la cytoparaffine (fig. 13). L'analogie est frappante, il s'agit bien du même phénomène.

d) Interprétation. — Pour interpréter cette structure, nous avons tracé (fig. 14) les amplitudes et les phases des trois premiers coefficients de diffraction a_n et p_n qui représentent les excitations des modes électriques et magnétiques correspondants. On constate que chaque mode

Fig. 14 *a*.

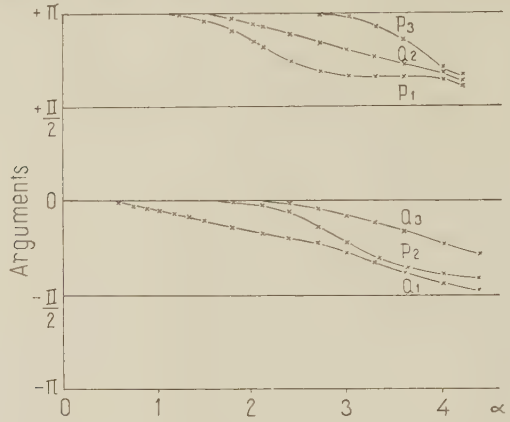

Fig. 14 *b*.

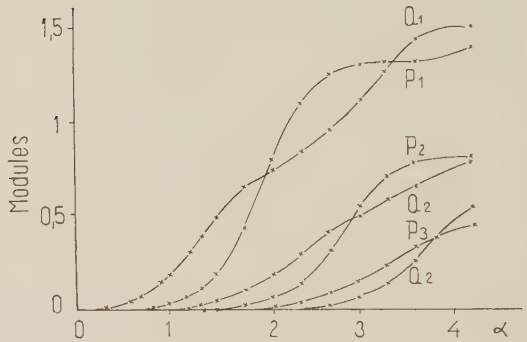

Fig. 14. — Coefficients de Mie a_n et p_n ; $n = 1{,}33$.

présente une série de résonances : maxima d'amplitudes et variation rapide de phase.

La section efficace est la somme des amplitudes des modes partiels affectés de coefficients dépendant de leur rang. Les indentations sont donc dues aux résonances des divers types de champs électriques et magnétiques qui sont excités simultanément par l'onde incidente.

Remarquons qu'il ne s'agit pas ici des « modes naturels d'oscillation » prévus par la théorie de Debye et qui correspondent à une structure de champ interne pouvant subsister sans excitation extérieure. Ceux-ci ne

sont pas amortis dans le cas du diélectrique parfait, donc ne rayonnent pas [34]. Pour préciser ce point, nous avons vérifié que les équations de Debye :

Type magnétique :

$$\frac{[N\rho j_n(N\rho_1)]'}{\mu_1 j_n(N\rho_1)} = \frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{\mu_2 h_n^{(1)}(\rho)}$$

Type électrique :

$$\frac{[N\rho j_n(N\rho_1)]'}{N^2 j_n(N\rho)} = \frac{\mu_2}{\mu_1}\frac{[\rho h_n^{(1)}(\rho)]'}{h_n^{(1)}(\rho)}$$

ne possèdent pas de racine au voisinage des premiers extrema des coefficients a_1 et p_1.

Nous avons cherché à déterminer s'il existe une relation simple entre l'intervalle des indentations et l'indice. Si l'on considère la réflexion sur une lame à faces parallèles, les extrema sont séparés par une variation d'épaisseur $\delta e = \lambda/2n$, ou en posant $\alpha = 2\pi a/\lambda$, il vient : $\delta\alpha = \pi/2n$.

Pour l'eau, on trouve ainsi $\delta\alpha = 1{,}18$, la courbe théorique donne $\delta\alpha = 1{,}2$. Pour la cytoparaffine d'indice $n = 1{,}5$, $\delta\alpha = 1{,}05$, la courbe donne 1,10. Nous pensons toutefois qu'il n'y a là qu'une coïncidence assez curieuse, car l'intervalle $\delta\alpha$ varie quelque peu avec α. D'autre part, la structure complexe de la courbe ne saurait s'expliquer par un schéma aussi grossier que celui de la lame à faces parallèles.

Il convient de remarquer la commodité de notre procédé qui permet de tracer une courbe étendue en quelques jours et même, au prix de quelques modifications, d'étudier de grosses sphères (jusque vers $\alpha = 100$ ou 150). Un tel travail nécessiterait des mois de calcul sur machine électronique si on utilisait la détermination directe par la théorie de Mie [12].

2) **Étude des sphères absorbantes.** — Nous avons déterminé le rapport section efficace/section géométrique pour des sphères absorbantes en fonction du paramètre α. La matière utilisée est un mélange homogène de cytoparaffine et d'oxyde Fe_2O_3. La préparation des sphères et le processus de mesure sont identiques à ceux utilisés pour les diélectriques parfaits.

Les figures 15 et 16 représentent les résultats pour des échantillons de caractéristiques respectives : $\varepsilon = 4 - j\,0{,}08$ et $\varepsilon = 4{,}4 - j\,0{,}12$. Ces grandeurs ont été déterminées par la méthode du guide court-circuité, négligeant l'action des termes magnétiques et ne sont données qu'à titre approximatif.

Il semble qu'on puisse déduire des quatre courbes (fig. 10, 11, 15 et 16) les lois suivantes :

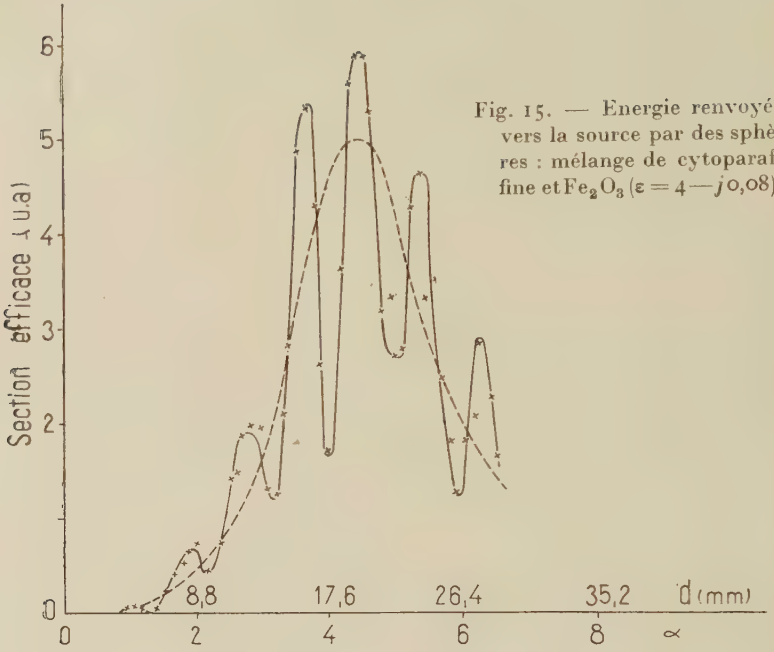

Fig. 15. — Energie renvoyée vers la source par des sphères : mélange de cytoparaffine et Fe_2O_3 ($\varepsilon = 4 - j\,0{,}08$).

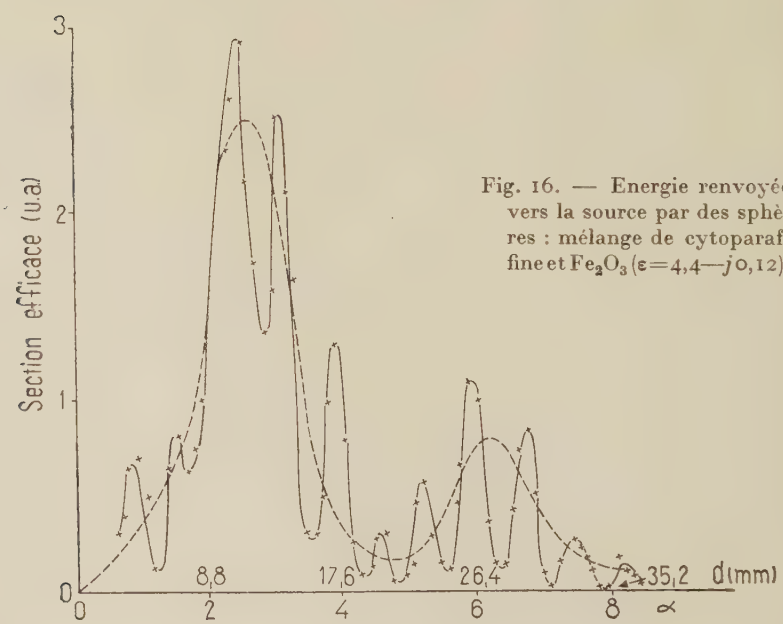

Fig. 16. — Energie renvoyée vers la source par des sphères : mélange de cytoparaffine et Fe_2O_3 ($\varepsilon = 4{,}4 - j\,0{,}12$).

La courbe moyenne a toujours la même allure, mais se contracte suivant l'axe des α lorsque l'indice croît.

Le rapport des amplitudes des indentations et de la courbe moyenne décroît lorsque l'absorption croît. A la limite : sphères parfaitement réfléchissantes, les indentations ont disparu.

Ces deux constatations semblent lier le phénomène au comportement des ondes à l'intérieur de la sphère et corroborer en quelque sorte le modèle optique du type « lame à faces parallèles ».

Il serait intéressant de développer l'étude de ce phénomène. Il faudrait pour cela réaliser des sphères mieux surfacées que celles que nous avons utilisées, de manière à préciser la forme de la courbe expérimentale.

CHAPITRE V

Interaction de deux sphères voisines placées dans un champ électromagnétique.

La théorie de Trinks (chap. II) détermine les phénomènes d'interaction entre deux sphères voisines, de nature quelconque, lorsque le diamètre est petit devant la longueur d'onde. Elle s'applique à la propagation d'ondes centimétriques dans la pluie, les brouillards, d'ondes lumineuses dans les solutions colloïdales. Par contre, elle ne permet pas de traiter, par exemple, de questions telles que la propagation de la lumière dans les nuages, dont les particules ont un diamètre assez grand devant la longueur d'onde. Nous avons essayé d'étendre expérimentalement les résultats théoriques de Trinks, au cas où l'on s'écarte de la diffusion Rayleigh.

1) **Définitions.** — 1) **Paramètre d'interaction.** — Le choix du paramètre d'interaction est largement arbitraire, il nous a semblé commode de considérer la section efficace radar. Les deux sphères étant placées à une même distance du système cornet émetteur, cornet récepteur, et symétriquement par rapport au plan de leurs axes, nous appellerons « paramètre d'interaction » le rapport $|\vec{E}|/|(\vec{e'}+\vec{e''})|$ de l'énergie $\vec{E}$ renvoyée vers la source par l'ensemble des deux sphères, à la somme $\vec{e'}+\vec{e''}$ des énergies réfléchies par chacune d'elles.

2) **Positions principales.** — Le système de sphères possède un axe diamétral $\triangle$ qui peut prendre une infinité de positions par rapport au trièdre constitué par les trois vecteurs $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{c}$ définissant le champ

incident. Nous avons étudié les trois positions particulières (principales) pour lesquelles $\triangle$ est parallèle à l'un des vecteurs de base du trièdre $(\vec{E}, \vec{H}, \vec{c})$.

Pour les deux premières, $\triangle // \vec{E}$ ou $\vec{H}$, nous avons mesuré, en fonction de l'écart entre sphères, le paramètre d'interaction que nous venons de définir. Pour le troisième, $\triangle // \vec{c}$, nous avons cherché, à partir de quel écart l'interaction peut être considérée comme négligeable.

II) **Méthode expérimentale.** — 1) $\triangle$ **parallèle à** $\vec{E}$ **ou** $\vec{H}$. — Le dispositif et la méthode de mesure sont identiques à celles du chapitre IV

Fig. 17. — Dispositif expérimental.

(fig. 17). Les fils de suspension des sphères coulissent sur une tige portée par la crémaillère mobile.

On détermine l'énergie $\vec{E}$ renvoyée par l'ensemble des deux sphères, puis les énergies $\vec{e'}$ et $\vec{e''}$ renvoyées par chacune d'elles et l'on fait le rapport. Il faut, pour obtenir un résultat correct, que les ondes réfléchies par chacune des sphères aient même intensité et arrivent en phase sur le détecteur. On satisfait à la première condition en déplaçant les fils le long de la tige sans modifier leur écartement, à la seconde, en tournant l'axe de la tige autour d'une verticale passant par son centre.

Le réglage est effectué lorsque $\vec{e'} = \vec{e''}$ et que $\vec{E}$ est maximum. En fait, chacune des opérations réagit sur l'autre et l'obtention d'un point expérimental est extrêmement délicate et souvent demande plusieurs heures.

2) $\triangle$ **parallèle à** $\vec{c}$. — L'expérience consiste à laisser fixe la sphère la plus voisine des cornets et à déplacer la seconde à partir du contact en enregistrant l'énergie renvoyée vers la source (fig. 18). La courbe

Fig. 18. — Dispositif expérimental.

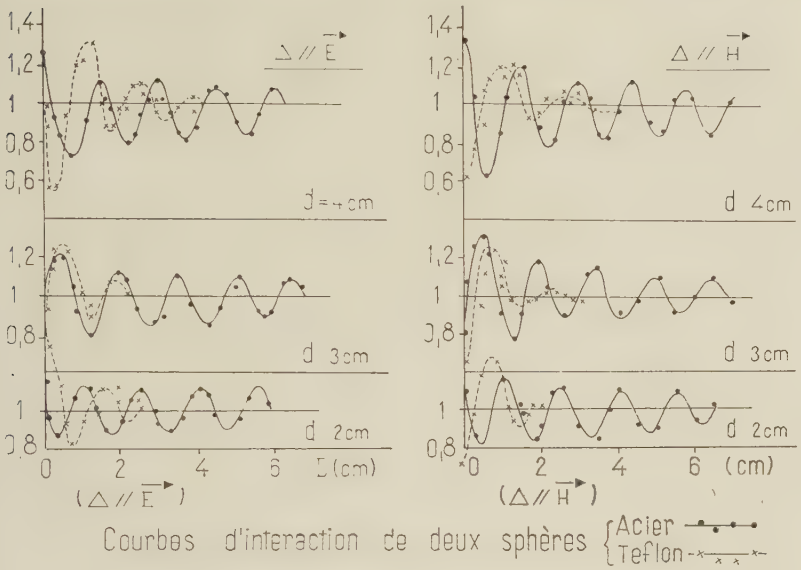

Fig. 19.

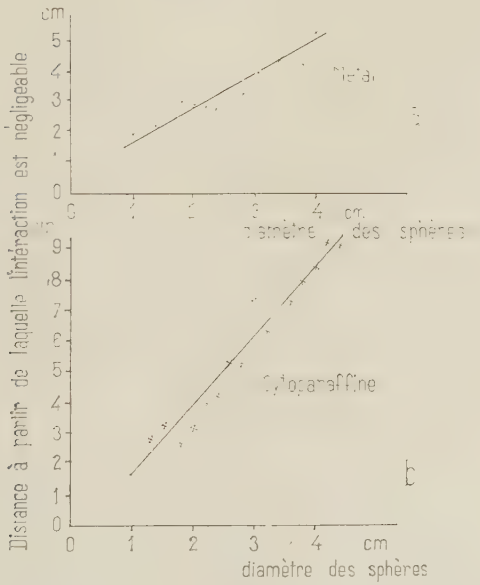

Fig. 20. — Intensité renvoyée en sens inverse de la propagation par 2 sphères voisines.

obtenue, d'abord irrégulière, se transforme en une sinusoïde. A ce moment, on admet que l'interaction a pris fin. La mesure est plus facile et plus rapide que la précédente, mais moins précise.

III) **Résultats expérimentaux dans le cas de sphères parfaitement réfléchissantes.** — 1) $\triangle$ **parallèle à** $\vec{E}$ **ou** $\vec{H}$. — Nous avons déterminé le paramètre d'interaction pour trois séries de sphères d'acier de diamètres 2, 3 et 4 cm. La figure 19 représente les cas $\triangle // \vec{E}$ et $\triangle // \vec{H}$. Les courbes ont l'aspect de sinusoïdes à amortissement faible.

2) $\triangle$ **parallèle à** $\vec{c}$. — Nous avons tracé la droite représentant la moyenne des mesures de distance maximum d'interaction. La courbe réelle oscille probablement autour de cette moyenne (fig. 20 *a*). Il serait vain de chercher à le préciser, étant donné l'indétermination inhérente au procédé de mesure.

IV) **Comparaison avec la théorie de Trinks.** — Dans le cas de sphères conductrices, de rayons très petits devant la longueur d'onde, la théorie de Trinks conduit aux conclusions suivantes :

1) **Si** $\triangle$ **est parallèle à** $\vec{H}$. — Le champ diffracté par une sphère unique et calculé d'après la théorie de Mie est multiplié par le facteur $|\ D\ |^2$ avec :

$$|\ D\ |^2 = 1 - 2\left(\frac{a}{R}\right)^3 \mathbf{a}' + \left(\frac{a}{R}\right)^6 |\ \mathbf{a}\ |^2,$$

a, rayon de la sphère, R, distance entre centres.

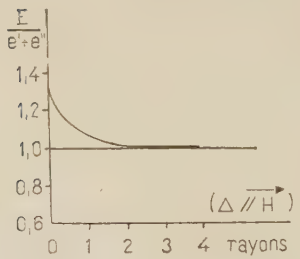

Fig. 21.

Interaction de 2 sphères réfléchissantes (d'après la théorie de Trinks).

Pour un corps parfaitement conducteur, $|\ \mathbf{a}\ | = \mathbf{a}' = 1$ [28].

Nous avons calculé sur ces données, la variation du rapport $(E/e' + e'')$, en fonction de l'écart entre sphères mesuré en rayons. La figure 21 montre que l'interaction, relativement forte au contact, décroît très vite et de façon monotone. Elle est déjà négligeable quand la distance entre sphères égale le diamètre.

2) **Si** $\triangle$ **est parallèle à** $\vec{E}$. — L'interaction est toujours nulle : rayonnement dipolaire pur.

3) **Si Δ est parallèle à $\vec{c}$.** — La loi d'interaction est la même que pour $\Delta // \vec{H}$.

Nos résultats expérimentaux présentent ainsi d'importantes divergences avec les prévisions théoriques. Ceci est lié à l'existence des termes dipolaires magnétiques et multipolaires électriques et magnétiques du rayonnement diffusé, ainsi qu'à l'accroissement du rapport énergie totale diffusée sur énergie incidente.

V) **Interprétation des résultats.** — 1) **Δ parallèle à $\vec{E}$ ou $\vec{H}$.** — On admet que les ondes incidentes sont planes, polarisées linéairement. Les sphères S_1 et S_2 (fig. 22) se comportent comme des sources synchrones, mais déphasées par rapport au champ incident $\vec{E}^i$. En O_2, centre de S_2, le champ $\vec{E}^s$, diffracté par S_1, s'ajoute à $\vec{E}^i$. Selon que $\vec{E}^s$ et $\vec{E}^i$ sont en phase ou en opposition de phase, le champ total $\vec{E}^t$ est supérieur ou inférieur à $\vec{E}^i$, et l'énergie diffusée par S_2 sera inférieure ou supérieure à l'énergie diffusée par la sphère isolée.

Soit l, la distance O_1O_2. Le déphasage que subit l'onde rayonnée par S_1 en arrivant sur S_2 est, si l'on admet que les sources sont ponctuelles, $\delta\varphi = 2\pi l/\lambda$. La distance qui rétablit un même extremum sera donc égale à λ. C'est ce que l'expérience confirme.

Cette explication qualitative n'est applicable, en toute rigueur, qu'à des sources ponctuelles, mais conduit à une prévision correcte des phénomènes. Dans le cas de la diffusion Rayleigh, si la distance entre sphères est très faible, l'onde émise par O_1 arrive en O_2 en phase avec le champ incident [18], d'où le renforcement au contact. Si la distance croît, l'intensité reçue par S_2 et provenant de O_1 décroît, en même temps que les effets du déphasage commencent à se faire sentir. C'est ce qui explique la décroissance rapide de l'interaction.

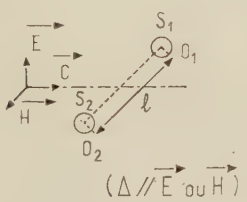

Fig. 22.
Interaction entre 2 sphères.

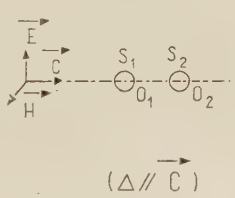

Fig. 23.
Interaction entre 2 sphères.

2) **Δ parallèle à $\vec{c}$** (fig. 23). — En arrière de la sphère S_1, la concentration de lumière due à la diffraction tend à s'opposer à l'effet d'ombre géométrique [4]. La sphère S_2 est bientôt illuminée comme si S_1 n'existait pas. D'autre part, les diagrammes de Blumer [2] montrent

ellipsoïdes, les cylindres circulaires droits et, par la suite, diverses figures planes. Ce choix a été guidé par les possibilités de réalisation, ainsi que par le souci de se rapprocher de cas théoriquement calculables.

I) **Méthode expérimentale.** — Le dispositif est décrit au chapitre III (fig. 4, p. 284) ; on utilise le cornet récepteur *c*. Les réglages s'effectuent par tâtonnements.

Nous ne considérons que les positions principales des corps diffringents pour lesquelles un axe de symétrie est parallèle à l'un des vecteurs $\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{c}$, définissant le champ incident. Dans une première série d'expériences, le chariot porte-sonde se déplace parallèlement à $\vec{H}$ (trajectoire I), dans une seconde, parallèlement à $\vec{E}$ (trajectoire II).

Sur les courbes, on porte, en abscisses, les déplacements linéaires de

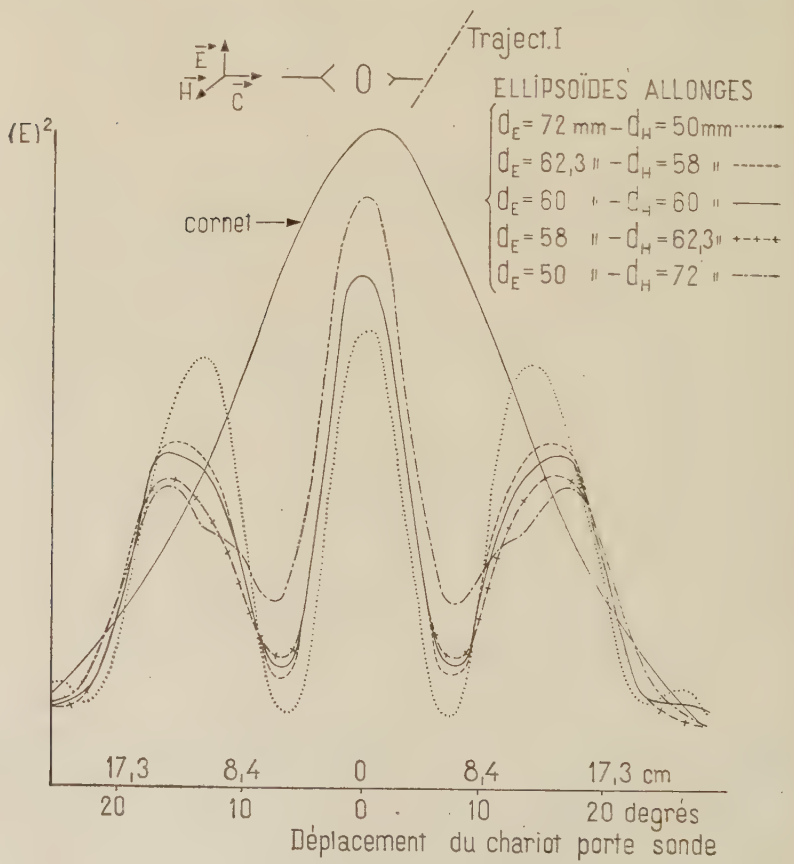

Fig. 25. — Répartition d'intensités.

la sonde et les angles θ correspondants (le zéro indiquant le passage par l'axe), en ordonnées, le carré du champ diffracté.

II) **Étude des ellipsoïdes.** — 1) **Réalisation.** — Nous avons taillé dans des blocs de plomb coulé, à l'aide d'un tour à bois, quatre ellipsoïdes de révolution. Pendant la taille, le travail est contrôlé et guidé à l'aide de gabarits tracés avec soin. Après dégrossissage à la gouge, le bloc est démonté du tour, terminé à la lime et douci au papier de verre. Le solide est ensuite cuivré par électrolyse et poli. La précision de taille est de l'ordre de 2 à 3/10 mm.

2) **Résultats des mesures.** — Les figures 25 et 26 représentent les diagrammes de diffraction de quatre ellipsoïdes dans le cas de la

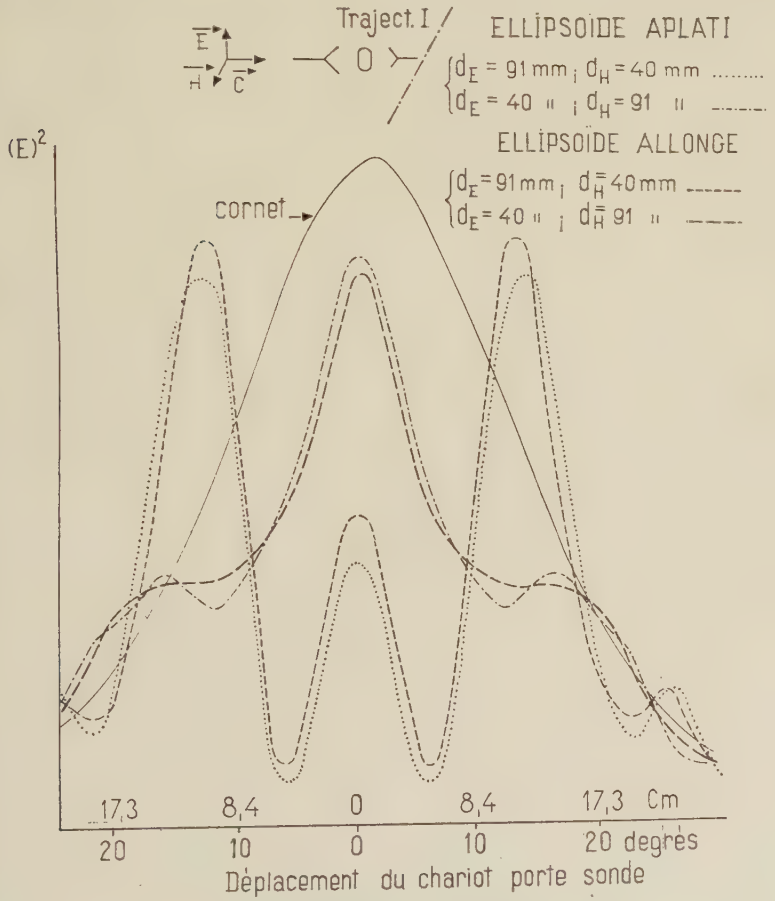

Fig. 26. — Répartition d'intensités.

trajectoire I. Leurs dimensions sont données sur les figures ; d_E et d_H indiquent les grandeurs des axes de l'ellipsoïde parallèlement à $\vec{E}$ et $\vec{H}$ respectivement. Les sections méridiennes, qui ont toutes même aire : 28,3 cm² environ, sont disposées dans le plan $\vec{E}$, $\vec{H}$. Les phénomènes étant analogues le long de la seconde trajectoire, nous ne les avons pas reproduits.

On constate que le diagramme se déforme très vite avec l'excentricité. Une variation de 2 mm sur l'axe est perceptible jusque sur le maximum central. D'autre part, l'effet de la polarisation (grand axe parallèle à $\vec{E}$ ou $\vec{H}$) est très marqué.

Notons la grande ressemblance entre les figures de diffraction de l'ellipsoïde allongé et de l'ellipsoïde aplati de mêmes axes 40 × 91 mm (fig. 26). Ceci montre l'influence prédominante de la section droite et nous suggère l'examen des phénomènes produits par les surfaces planes de même section.

III) **Ellipses** (fig. 27). — Les ellipses sont taillées dans une feuille d'aluminium d'épaisseur 1 mm. Comme le font prévoir les résultats

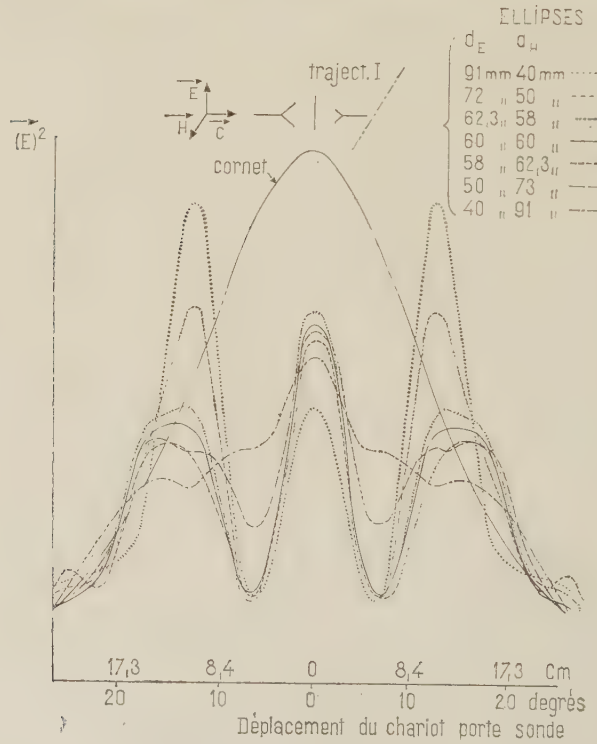

Fig. 27. — Répartition d'intensités

précédents, l'analogie entre les diagrammes de diffraction des ellipses et ceux des ellipsoïdes de mêmes axes est très marquée. Seule, l'intensité du maximum central est plus faible pour les ellipses. On observe des phénomènes semblables pour la trajectoire II.

IV) **Cylindres limites.** — Nous considérons des cylindres droits, circulaires, en laiton poli, de diamètre 4 cm et de hauteurs variables. L'axe occupe successivement les trois positions principales Les hauteurs sont indiquées sur les figures.

1) **Axe parallèle à** $\vec{c}$. — Les figures de diffraction sont à peu près insensibles à la hauteur du cylindre (fig. 28, traject. I). Néanmoins, quand la hauteur atteint 35 cm, la courbe se détache nettement, mais

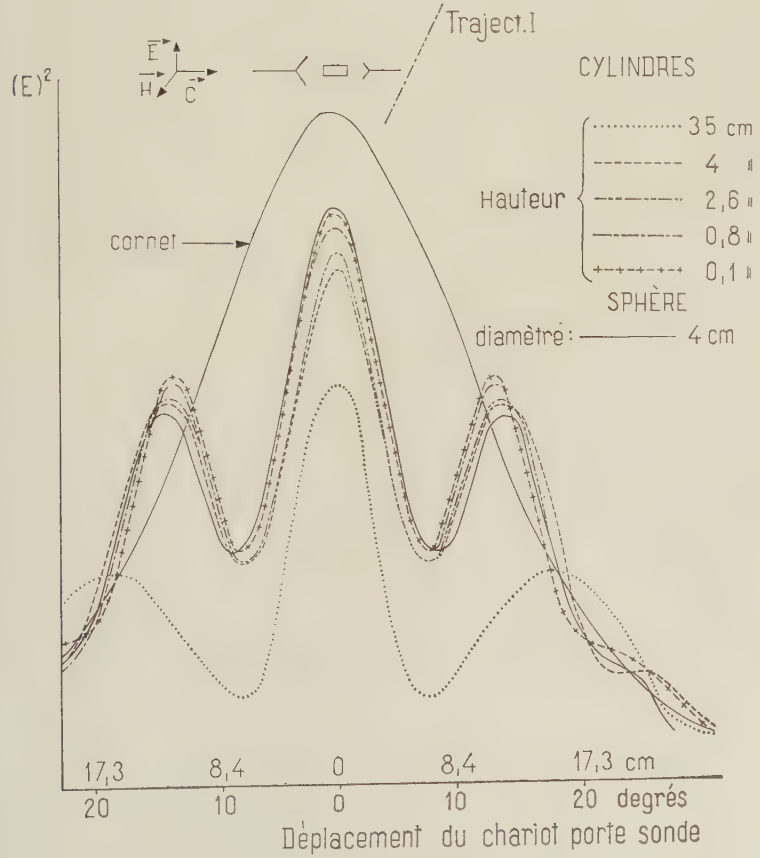

Fig. 28. — Répartition d'intensités.

les faces sont si rapprochées des cornets qu'on peut craindre des perturbations du champ incident. Sur la trajectoire II, les phénomènes sont analogues.

2) **Axe parallèle à $\vec{H}$.** — Les diagrammes varient beaucoup plus que dans le cas précédent lorsque la hauteur augmente (fig. 29), mais présentent encore une certaine ressemblance. On note, en particulier, la quasi-égalité de l'intensité du maximum central dans tous les cas, excepté pour le cylindre de longueur infinie.

3) **Axe parallèle à $\vec{E}$.** — Dans ce cas (fig. 30), les différences entre courbes prises selon les deux trajectoires sont très faibles. Par contre,

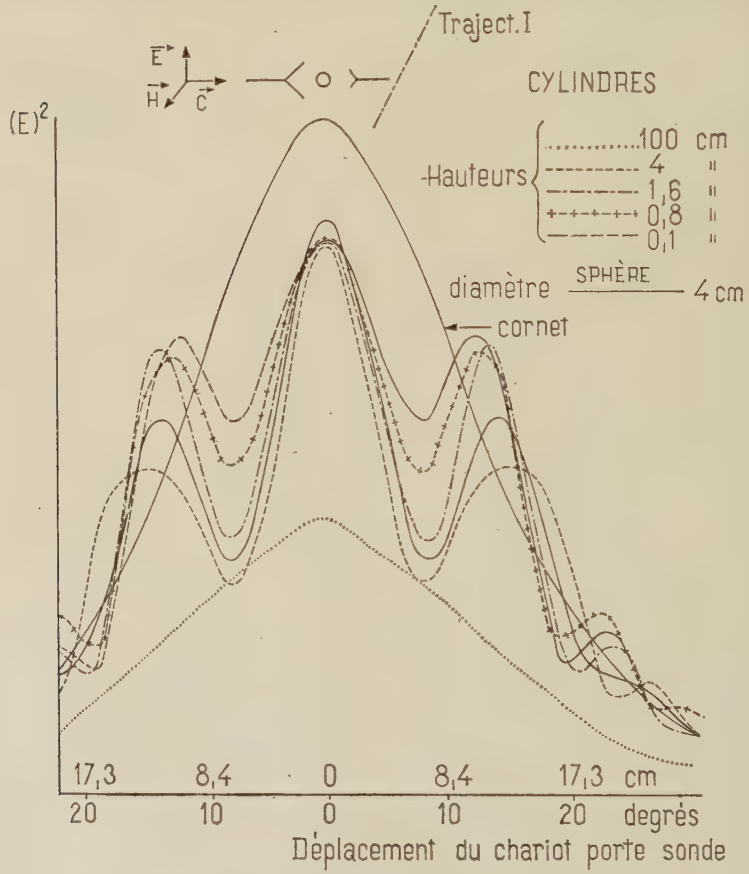

Fig. 29. — Répartition d'intensités.

l'influence des variations de hauteur est importante pour une même trajectoire. Nous avons tracé les diagrammes correspondant au cylindre de longueur 100 cm (infinie), ce qui permet de constater le bon accord avec les résultats de Kodis [21].

V) **Figures planes diverses.** — Tous les solides que nous avons considérés jusqu'à présent (le cylindre d'axe $//\vec{c}$ excepté) possèdent un axe d'ordre 2 parallèle à $\vec{c}$. Nous avons cherché quelle est l'influence, sur le diagramme de diffraction du disque, de déformations faisant apparaître, dans cette direction, un axe d'ordre supérieur à 2. Dans ce but, nous avons étudié des hexagones réguliers convexe et étoilé, un carré et un losange, ayant tous même surface : 28,3 cm² environ.

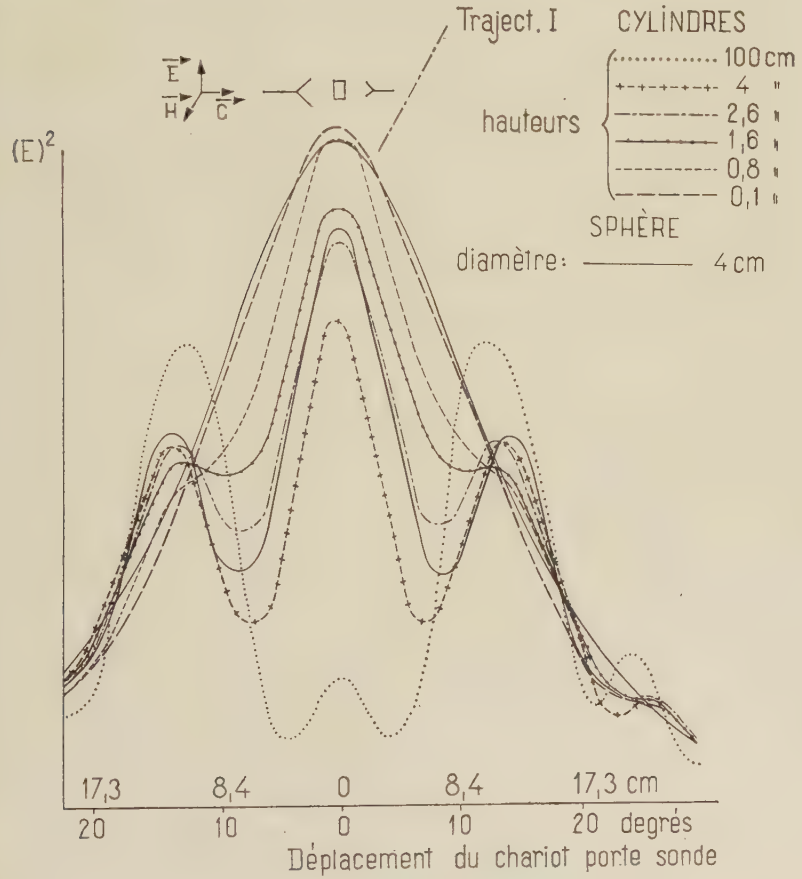

Fig. 30. — Répartition d'intensités.

Les phénomènes sont analogues sur les deux trajectoires (fig. 31, traject. I). Toutes les courbes sont pratiquement confondues au centre et ne commencent à se différencier, faiblement d'ailleurs, qu'à partir du second maximum.

VI) **Conclusion de l'étude expérimentale.** — Notre étude a mis en évidence les deux faits suivants :

a) Le diagramme de diffraction est fortement altéré si une déformation du corps diffringent fait apparaître un axe d'ordre 2 parallèle à $\vec{c}$, mais est peu modifié si l'axe obtenu est d'ordre supérieur.

Ainsi un allongement de 2 mm de l'axe de révolution d'un ellipsoïde ou de l'élément correspondant d'une ellipse produit un effet aussi mar-

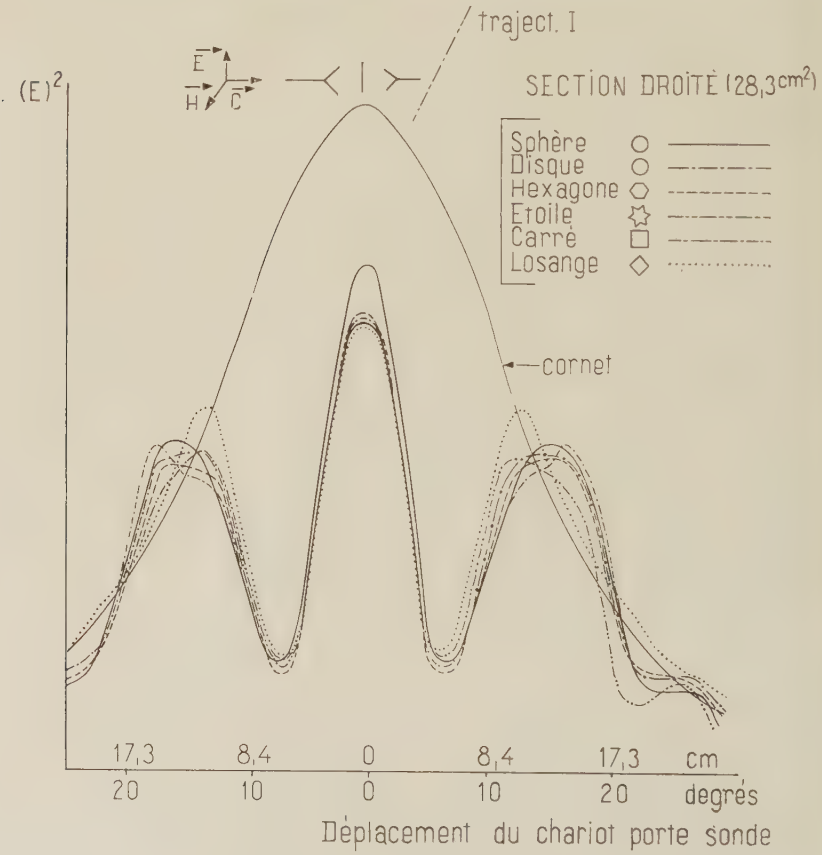

Fig. 31. — Répartition d'intensités.

qué que le passage du disque à l'hexagone étoilé dont les pointes ont une hauteur de 16 mm.

b) Une déformation d'un corps diffringent qui laisse invariable la section droite n'a qu'un effet négligeable sur la figure de diffraction. Si, la section droite variant, la dimension parallèle à $\vec{E}$ est maintenue constante, l'effet, quoique marqué, reste assez faible. Enfin, si la dimension parallèle à $\vec{E}$ varie, la modification du diagramme est importante.

VII) **Rappel des travaux théoriques.** — La théorie de la diffraction par les ellipsoïdes peut se formuler rigoureusement par le même procédé que pour les sphères. Möglich [29] l'a tenté dans le cas général, mais n'a pu surmonter les difficultés. Le cas des ellipsoïdes de révolution d'axe parallèle à $\vec{c}$ a été résolu [32, 35], ainsi que celui du disque mince circulaire [7].

Des solutions approchées, avec de très importantes restrictions, ont été obtenues pour les cylindres limités, en connexion avec la théorie de l'antenne [35, 17]. Le cas du cylindre indéfini est classique [21]. La diffraction par des ellipsoïdes petits devant la longueur d'onde a été décrite [10], ainsi que les phénomènes produits par des trous elliptiques [8].

Aucun de ces procédés ne peut s'appliquer à notre étude : les calculs rigoureux ne sont pas résolus dans notre cas et les hypothèses restrictives des méthodes approchées ne sont pas vérifiées. C'est pourquoi, nous nous contenterons d'une discussion approximative basée sur le principe d'Huyghens.

VIII) **Interprétation.** — En optique physique, le calcul de l'éclairement diffracté par une surface S, en un point P, s'effectue à l'aide des formules de Kottler [3] :

$$4\pi\vec{E}(P) = \frac{1}{ik}\oint_C \vec{\nabla}\psi(\vec{H}\vec{ds}) + \oint_C \psi[\vec{E}\wedge\vec{ds}] + \iint_S \left(\psi\frac{\partial\vec{E}}{\partial n} - \vec{E}\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS$$

$$4\pi\vec{H}(P) = \frac{1}{ik}\oint_C \vec{\nabla}\psi(\vec{E}\vec{ds}) + \oint_C \psi[\vec{H}\wedge\vec{ds}] + \iint_S \left(\psi\frac{\partial\vec{H}}{\partial n} - \vec{H}\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS$$

S est la surface considérée, limitée par le contour C (fig. 32).

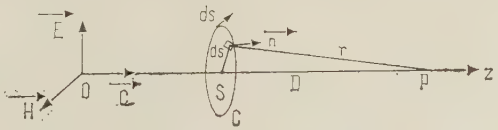

Fig. 32. — Application des formules de Kottler.

$\vec{E}$ et $\vec{H}$, les champs sources sur la surface S d'élément superficiel dS.

$\oint$ est prise dans le sens positif, le long du contour C d'élément dS.

$\vec{n}$ est la normale à la surface, orientée dans le sens de la lumière incidente.

$$\psi = e^{-ikr}/r, \qquad k = 2\pi/\lambda.$$

On remarque que l'application des formules de Kottler ne résout pas le problème, mais permet, connaissant $\vec{E}$ et $\vec{H}$ de déterminer le champ en un point P quelconque.

La méthode la plus commode est en général de résoudre le problème complémentaire de l'ouverture pour passer à l'écran, par le principe de Babinet. Si les ouvertures sont grandes devant la longueur d'onde, on peut appliquer les formules de Kottler, en admettant comme sources les champs incidents : c'est l'approximation de l'optique physique.

1) **Cas des cylindres.** — On admet que le champ est égal à zéro dans tous les points de l'ombre, au champ total (incident + réfléchi) dans la région éclairée. Si l'axe est parallèle à $\vec{c}$, le domaine d'intégration est constitué par la face éclairée du cylindre et ne dépend pas de l'épaisseur : ceci est conforme à notre résultat expérimental.

Dans les deux autres cas, l'application des formules de Kottler est difficile, car les dimensions sont de l'ordre de la longueur d'onde et les surfaces ne sont pas planes. Nous nous contenterons de remarquer que, lorsque $\triangle$ est parallèle à $\vec{H}$, la longueur parallèle à $\vec{E}$ (diamètre du cylindre) ne varie pas. L'expérience montre que la différence entre courbes est moindre que dans le second cas ($\triangle // \vec{E}$), ce qui fait conclure à une prédominance des termes dipolaires électriques induits par le champ incident.

2) **Ellipsoïdes et ellipses.** — Nous cherchons ce que prévoient les formules de Kottler pour le champ dans l'axe d'une ellipse normale à la direction de propagation. Nous admettons que l'on puisse prendre pour sources les champs incidents. Par raison de symétrie, les intégrales de contour disparaissent et il reste :

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\psi \frac{\partial \vec{E}}{\partial n} - \vec{E} \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) dS.$$

Nous admettons, de plus, que le point P (fig. 33) est assez éloigné de l'ellipse pour qu'on puisse négliger le grand axe devant D. Si l'on pose comme champ électrique incident :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{ik(ct-z)}$$

on trouve en tout point de l'ouverture :

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -ik\,\frac{e^{-ikr}}{r}\,; \qquad \frac{\delta \vec{E}}{\partial n} = ik\vec{E}_0 e^{ikct}$$

d'où :

$$\vec{E}(P) = \frac{ik}{2\pi} e^{ikct} \int\int_S \frac{e^{-ikr}}{r} \vec{E}_0 dS$$

la distance du point M courant de l'ellipse au point P est :

$$\sqrt{D^2 + \varepsilon^2} = D + \frac{a^2}{D} = D$$

en négligeant le dernier terme, on trouve :

$$\vec{E}(P) = \frac{ik}{2\pi D} \vec{E}_0 S e^{ik(ct-D)}$$

$\vec{E}$ désignant la valeur moyenne du champ.

En conséquence, avec les hypothèses admises, l'intensité au point P est indépendante de la disposition du grand axe par rapport à $\vec{E}$, et n'est fonction que de l'aire de l'écran, ce qui est contraire à l'expérience.

Le résultat expérimental se comprend très bien si l'on considère que l'hypothèse sur les sources est inexacte et que le champ réel sur l'écran dépend de ses dimensions.

Ceci suggère que l'effet de l'excentricité sur l'éclairement en un point de l'axe Oz doit être d'autant moins marqué que l'ellipse est plus grande, puisqu'alors on se rapproche des conditions de validité de l'optique physique. L'appareillage actuel ne nous permet pas de vérifier ces conclusions.

Nous ne traiterons pas le cas des ellipsoïdes par suite de la difficulté d'application des formules. La similitude des résultats avec les ellipses s'explique par les considérations développées au sujet des cylindres.

3) **Figures planes diverses.** — Dans les cas étudiés, la symétrie est supérieure à celle des ellipses. Il en résulte que le champ moyen dans l'ouverture doit se rapprocher de celui du cercle, donc les intensités en un point de l'axe tendent à s'égaler, quels que soient par ailleurs les détails de la figure. C'est ce que confirme l'expérience.

IX) **Analogies optiques.** — L'ensemble de ces résultats expérimentaux montre que les détails de structure des objets diffringents n'apparaissent pas dans la bande centrale, mais dans les bandes latérales de diffraction. Des phénomènes analogues sont connus en optique. Citons, par exemple, les travaux d'Abbe relatifs à la formation de l'image microscopique [3].

Si l'on éclaire en lumière cohérente un réseau placé sur la platine

d'un microscope faiblement grossissant (fig. 33), on observe dans le plan focal de l'objectif une image centrale entourée de spectres symétriques. Si l'on admet tous ces spectres pour la formation de l'image définitive, on reconstitue le réseau correct. Si l'on n'en admet qu'un sur deux, on change l'aspect du réseau, enfin si l'on admet que l'image centrale on observe un fond continu.

Cette expérience, qui est l'analogue optique de la nôtre, confirme nos résultats ; l'information est contenue dans les spectres secondaires.

Peut-être faut-il voir une autre analogie avec les procédés de transmission radioélectriques par bandes latérales, l'onde porteuse étant supprimée.

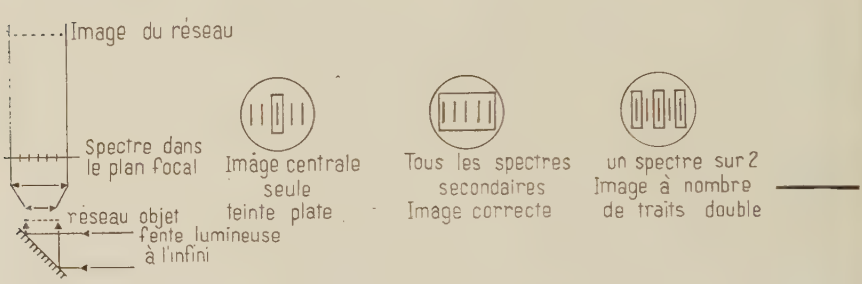

Fig. 33. — Expérience d'Abbe.

D'autre part, on peut remarquer que les écrans elliptiques possèdent des caractères communs avec les lames cristallines uniaxes, à faces parallèles, taillées parallèlement à l'axe. En particulier, si la radiation incidente est parallèle à l'un des axes de l'ellipse, la radiation diffractée selon Oz (fig. 33) est rectiligne, si la vibration incidente fait un angle avec les axes de l'ellipse, la vibration diffractée dans les mêmes conditions est elliptique. Dans la même analogie, les écrans carrés, polygonaux et circulaires se comportent comme des lames uniaxes taillées perpendiculairement à l'axe.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous pensons avoir contribué à mettre en évidence l'intérêt que présente l'étude de l'optique des ondes hertziennes pour la solution des problèmes de diffraction de la lumière.

Les appareillages, maintenant classiques d'ondes centimétriques, permettent d'effectuer des mesures commodes de champ et de phase dans tout l'espace. Nous décrivons une réalisation simple présentant de nombreux détails originaux.

Nous avons mis en évidence l'existence d'une structure complexe de la courbe des sections efficaces radar des sphères diélectriques et nous l'avons interprétée sur la base de la théorie électromagnétique. Nous avons précisé dans quelles conditions les détails de la structure des corps diffringents petits devant la longueur d'onde ont une influence sur le diagramme de diffraction. Le rôle de la symétrie de la section droite a été élucidé.

Les interactions entre sphères ne sont calculables que dans le cas de la diffusion Rayleigh. Nous avons montré que lorsque le diamètre des sphères est égal à quelques longueurs d'onde, l'interaction s'annule moins vite que ne le prévoit la théorie de Trinks et nous avons déterminé dans quelles conditions il est légitime de la négliger,

Les mesures au voisinage immédiat des corps diffringents sont encore l'objet de controverses, l'action des sondes sur la répartition des champs étant inconnue. Nous avons prouvé que dans certains cas tout au moins, ces mesures sont possibles et donnent des résultats en accord avec la théorie rigoureuse.

Enfin, nous avons montré [26 *bis*] que la méthode de mesure en ondes centimétriques permet d'obtenir en quelques heures les diagrammes polaires de diffusion de sphères isolées pour lesquelles les mesures optiques sont difficiles et sujettes à caution et où les calculs nécessitent des mois de travail.

Nous voudrions, en terminant, insister sur le fait que le travail que nous venons de décrire ne constitue qu'un premier pas. De très riches champs d'investigation restent inexplorés, tels sont, parmi beaucoup d'autres, les effets des ondes polarisées circulaires, les phénomènes de diffraction produits par les corps anisotropes. Des études très étendues seront nécessaires pour les explorer.

BIBLIOGRAPHIE

(1) A. L. Aden. — *J. Appl. Phys.*, 1951, **22**, 601; *Amer. J. Phys.*, 1951, **19**, 163.
(2) H. Blumer. — *Z. f. Phys.*, 1925, **32**, 119; 1926, **38**, 304; 1926, **38**, 920.
(3) H. Bouasse et Z. Carrière. — *Diffraction*. Delagrave, Paris, 1923.
(4) L. Brillouin. — *J. Appl. Phys.*, 1949, **20**, 1110.
(5) G. Bruhat. — *Optique*. Masson, Paris, 1954, 230.
(6) Carazzi. — *Z. f. wiss. Mikr.*, 1909, **26**, 530.
(7) Carson Flammer. — *J. Appl. Phys.*, 1953, **24**, 1218; 1953, **24**, 1224.
(8) Chaang Huang, R. D. Kodis et H. Levine. — *J. Appl. Phys.*, 1955, **26**, 151.
(9) P. Debye. — *Ann. der Phys.*, 1909, **30**, n° 4, 57.
(10) R. Gans. — *Ann. der Phys.*, 1920, **62**, 331.
(11) B. Goldberg. — *J. Opt. Soc. Amer.*, 1953, **43**, 1221.

(12) R. O. Gumprecht et C. M. Sliepcevich. — *Tables of light scattering functions for spherical particles.* Univ. Michigan Press, 1951.
(13) J. S. Hey, G. S. Stewart, J. T. Pinson et P. E. V. Prince. — *Proc. Roy. Soc.*, 1956, **69**, 1038.
(14) A. von Hippel. — *Dielectric materials and applications.* Wiley, New York, 1954.
(15) H. Holl. — *Optik*, 1946, **1**, 213.
(16) H. C. Van de Hulst. — *Rech. Astr. Obs. Utrecht*, part I, 1946, **11**, part II, 1949, **11**.
(17) A. Hund. — *Short wave radiation phenomena.* McGraw Hill, New York, 1952.
(18) A. Kastler. — *La diffusion de la lumière par les milieux troubles.* Hermann, Paris, 1952.
(19) D. E. Kerr. — *Propagation of short radio waves.* McGraw Hill, New York, 1951.
(20) D. D. King. — *Tech. Rep.*, 50, Cruft Lab., Harvard Univ.
(21) R. D. Kodis. — *Tech. Rep.*, 105, Cruft Lab., Harvard Univ.
(22) M. Langeron. — *Précis de Microscopie.* Masson, Paris, 1942.
(23) H. Levine et J. Schwinger. — Dans *Theory of Electromagnetic waves.* Interscience Pub., New York, 1951.
(24) E. C. J. von Lommel. — *Münch. Abb.*, 1884, **15**, 233.
(25) J. R. Mentzer. — *Scattering and Diffraction of Radio waves.* Pergamon Press, London, 1955.
(26) J. Mevel. — *J. Phys. Rad.*, 1954, **15**, 109 A; 1957, **18**, 45 A.
(26 *bis*) J. Mevel. — *A paraître* au *J. Phys. Rad.*
(27) W. E. K. Middleton. — *Vision through the atmosphere.* Univ. of Toronto Press, 1952.
(28) G. Mie. — *Ann. der Phys.*, 1908, **25**, n° 4, 377.
(29) F. Möglich. — *Ann. der Phys.*, 1927, **83**, 609.
(30) G. Oster. — *Chem. Rev.*, 1948, **43**, 319.
(31) R. B. Penndorf. — *Geophysical Res. Paper*, M. 45, 1956.
(32) F. V. Schultz. — *Report U. M. M.* 42, Univ. of Michigan, 1950.
(33) J. E. Storer et J. Sevick. — *J. Appl. Phys.*, 1954, **23**, 369.
(34) J. A. Stratton. — *Electromagnetic Theory.* McGraw Hill, New York, 1941.
(35) C. T. Tai. — *Trans. I. R. E.*, 1952, PGAP-1; *J. Appl. Phys.*, 1952, **23**, 909.
(36) W. Trinks. — *Ann. der Phys.*, 1934, **22**, 561.
(37) G. N. Watson. — *A treatise on the theory of Bessel functions.* Cambridge University Press, 1952.

Imprimé avec les *Annales de Physique.* *Le Gérant :* G. Masson.

DÉPÔT LÉGAL : 1960, 1er TRIMESTRE, N° D'ORDRE 3380, MASSON ET Cie, ÉDITEURS, PARIS
Printed in France. IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. (31.0566), LAVAL, N° 4056. — 3-1960.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

La diffusion de la lumière par les milieux troubles.

Vu :
Le Président de la Thèse,
M. SCHMITT.

Vu et approuvé :
Rennes, le 21 juin 1957.
Pour le Doyen de la Faculté des Sciences,
R. POISSON.

Vu et permis d'imprimer :
Rennes, le 4 juillet 1957.
Le Recteur de l'Académie de Rennes,
P. HENRY.

MÉVEL